INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA
Y TECNOLOGÍA AVANZADA

# Resignificación del algoritmo para operar aditivamente con fracciones en un contexto escolar

Tesis para optar al grado de Maestra en Ciencias en Matemática Educativa
México, D.F.

**Presenta:**
Pilar Peña Rincón

**Director de tesis:**
Gustavo Martínez Sierra

Santiago de Chile, 2011

SIP-14

# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
## SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

*ACTA DE REVISIÓN DE TESIS*

En la Ciudad de México siendo las 10:00 horas del día 13 del mes de enero de 2011 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

**"Resignificación del algoritmo para operar aditivamente con fracciones en un contexto escolar"**

Presentada por el(la) alumno(a):

| Peña | Rincón | Pilar Alejandra |
|---|---|---|
| Apellido paterno | materno | nombre(s) |

Con registro:

| A | 0 | 9 | 0 | 6 | 7 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

aspirante al grado de:

Maestría en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dr. Gustavo Martínez Sierra

Dra. Gabriela Buendía Abalos

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

Dr. Apolo Castañeda Alonso

Dr. Mario Sánchez Aguilar

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

CICATA IPN

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politecnico Nacional

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 28 del mes de enero del año 2011, el (la) que suscribe Pilar Alejandra Peña Rincón alumno (a) del Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa con número de registro A090677, adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Doctor Gustavo Martínez Sierra y cede los derechos del trabajo intitulado Resignificación del algoritmo para operar aditivamente con fracciones en un contexto escolar, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección pilaralejandrapena@yahoo.es. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Pilar Alejandra Peña Rincón

*Todos nosotros sabemos algo. Todos nosotros ignoramos algo. Por eso, aprendemos siempre*

*Paulo Freire*


**Agradecimientos**

A mis hijos, Nahuel y Marahui, por comprender y compartir mi pasión por aprender
A mi padre, por su apoyo incondicional
A mis amigos Pancho y Silvia, por su cariño y por sus aportes a este trabajo
A Silvana, y a los amigos de México, por su amistad y solidaridad sin fronteras
A mis compañeros y compañeras de maestría, por tanto trabajo compartido
A Gustavo Martínez, por su disposición y acompañamiento
Al CICATA-IPN, por la oportunidad de crecer humana y profesionalmente

# Indice

# Relación de Ilustraciones y Tablas

# Resumen:

Sin duda, y así lo pueden asegurar muchos profesores y profesoras, uno de los conceptos matemáticos que mayor dificultad presenta en el avance de los y las estudiantes en la educación básica es el de las fracciones. Las diferencias epistemológicas respecto de los números naturales, que es lo que han trabajado antes de enfrentarse a este tema, producen obstáculos importantes en su comprensión y en su aprendizaje. Estos obstáculos permanecen en el tiempo y son arrastrados hasta bien avanzada la educación secundaria[1], e incluso, hasta la educación superior o terciaria.

Dentro de este tema, la operatoria con fracciones, en particular la aditiva, suele traer más inconvenientes de los deseados a los estudiantes, planteando un desafío al docente, quien debe gestionar el aprendizaje.

Utilizando como soportes teórico principal la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau (Brousseau, 1986), las nociones de *tarea* y *técnica* de la Teoría Antropológica de lo didáctico (TAD), y las nociones de *convención matemática* y de *resignificación* planteadas por Martínez Sierra (2005) y por García y Montiel (2007) respectivamente, diseñamos una secuencia didáctica que aborda la adición de fracciones .

Utilizando la ingeniería didáctica como metodología, analizamos las dimensiones: epistemológica, didáctica y cognitiva relativas a su proceso de enseñanza-aprendizaje con el objeto de determinar cuáles son las condiciones en las que la fracción se constituye como un conocimiento funcional para los estudiantes.

Atendiendo dichas condiciones y las acciones que realizan los estudiantes en cada situación, utilizando el concepto de convención matemática como una metáfora de aprendizaje y la noción de resignificación para dar cuenta del carácter dinámico de la construcción de los conocimientos, diseñamos, pusimos en escena y analizamos los resultados de la secuencia cuyo objetivo fue que las y los estudiantes construyesen progresiva y fundamentadamente un procedimiento para sumar fracciones, y que a través de dicho proceso resignificasen el algoritmo convencional aprendido previamente como una abreviación del recién construido.


[1] El sistema educativo chileno consta de ocho años de educación básica, o educación primaria (1° a 8° año básico, estudiantes de 6 a 13-14 años); y de cuatro años de educación media o secundaria (1° a 4° año medio, estudiantes de 14 a 17-18 años).

## Abstract:

Without a doubt this be can be assured by many teachers, one of the most difficult mathematical concepts for the successful learning of students in primary education is the concept of fraction. Epistemological differences with respect to the natural numbers, which is what they have been working on before approaching this issue, cause significant obstacles in their understanding and learning. These obstacles remain over the years and are easily carried forward into late years of high school2, and even into tertiary or higher education.

Within this topic, the operations with fractions - including the additive - usually cause students more problems than expected, posing a challenge to teachers who must manage to provide effective techniques for the students' learning.

By using as main theoretical supports the theory of didactic situations (TDS) of Brousseau (1986), the notions of task and technique of anthropological theory of didactics (TAD), and the notions of mathematical convention and of resignification raised by Martinez Sierra (2005) and Garcia and Montiel (2007) respectively, we have designed a teaching sequence that addresses the addition of fractions.

By using teaching engineering as a methodology, we analyzed the following: epistemological, didactic and cognitive aspects related to their teaching-learning process in order to determine the conditions under which the fraction is constituted as a functional knowledge for students.

Taking into consideration these conditions and actions that the students perform in each situation, and using the concept of mathematical convention as a metaphor for learning and the notion of resignification in order to convey the dynamic nature of knowledge construction, we have designed, put on stage and analyzed the results of a sequence aimed at students to construct a procedure for adding fractions in a progressive and justified way. By being involved in the procedure the goal was for students to re-define the previously learnt conventional algorithm as an abbreviation of the recently built algorithm.

[2] The Chilean education system consists of eight years of primary school (1st to 8th Grade, 6 to 13-14 year old students); and four years of secondary school – equivalent to high school (1st to 4th Secondary Grade, 14 to 17-18 year old students).

# Introducción

*-Tengo que buscar los múltiplos de los números de acá abajo* [se refiere a los denominadores 2 y 4, ilustración 1]. Escribe secuencialmente la "tabla de los múltiplos de 2 y la de los múltiplos de 4"

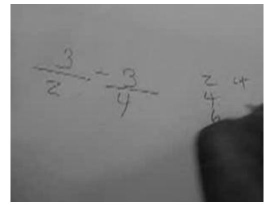


**Ilustración 1**

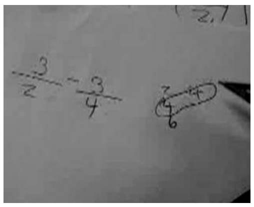


**Ilustración 3**

*-Se tiene que repetir el menor número, lo encerramos y vemos en qué lugar queda* [ilustración 2]*, éste queda en el 1°, y amplificamos, este otro queda en el 2°, y amplificamos*[3]*.* Y anota los números 1 y 2 sobre las fracciones [ilustración 3].

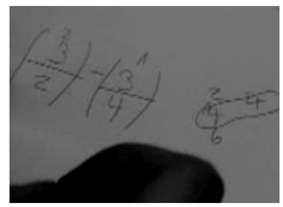


**Ilustración 2**

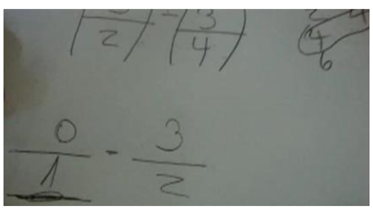


**Ilustración 4**

*-Después aquí, tengo que restar, uno* [el factor de amplificación de la segunda fracción] *menos cuatro* [el denominador de la segunda fracción] *son tres.* Anota el tres en el numerador de la fracción "amplificada" [ilustración 4] y continúa del mismo modo: *uno* [el factor de amplificación de la segunda fracción] *menos 3* [el numerador de la segunda fracción] *son dos* [lo anota en el denominador] *aquí sería dos menos dos son cero,* [lo anota en el numerador] *y aquí dos menos tres son una* [lo anota en el denominador].

Es decir, en vez de multiplicar para amplificar las fracciones y expresarlas como otras equivalentes a las originales pero con iguales denominadores, resta el número auxiliar (el factor de amplificación) con el numerador y lo anota en el denominador, de la misma manera resta el número auxiliar con el denominador y lo anota en el numerador. Justifica dicho procedimiento diciendo "como en este caso es resta se hace con resta".

Descripción de parte del procedimiento para restar fracciones de una estudiante de 6° año básico del sistema educativo chileno

[3] "Amplificar" es el término utilizado en Chile para referirse al proceso de búsqueda de una fracción equivalente mediante la multiplicación de numerador y denominador por un mismo factor. "Simplificar" es el proceso inverso: dividir el numerador y el denominador por un factor común.

Los saberes matemáticos son un producto cultural. Han surgido como parte de la actividad humana en el proceso constante de ir construyendo su realidad. En ciertos momentos histórico-culturales bien precisos, han dado respuestas a problemáticas o necesidades sociales específicas. Al igual que otros saberes construidos socialmente, el pensamiento matemático es una forma de pensar particular que permite al ser humano transformarse a sí mismo y a su realidad (G. Martínez-Sierra, 2005).

Sin embargo, usualmente en el sistema de enseñanza predomina una concepción en la que la razón de ser de los conocimientos matemáticos son olvidados, y a los estudiantes sólo llega el "así se hace", esperando que retengan el *cómo* sin el *por qué*. Por lo general, las prácticas educativas no dan cuenta de la historia ni del sentido de los objetos matemáticos.

En este escenario, resulta difícil para los y las estudiantes construir un significado para un concepto multifacético como las fracciones, y más aún lo es dotar de sentido a los algoritmos para operar con ellas. Como los algoritmos tradicionales, suelen ser abreviaciones de procesos más extensos, en los que sí se pueden apreciar los fundamentos matemáticos de los procedimientos, con frecuencia los y las estudiantes sólo logran retener una seguidilla de pasos mecánicos que carecen de argumentación, y que dan origen a "procedimientos" como el descrito al inicio de este apartado.

Esta investigación, tiene como objetivo adentrarse en la teoría para recabar elementos epistemológicos, cognitivos y didácticos con los cuales diseñar una secuencia didáctica que permita que los estudiantes transiten desde la concepción de la fracción como una parte de un todo hacia la fracción como un objeto que sirve para expresar medidas o cantidades no enteras, para desde allí construir, mediante un proceso de convención matemática, un procedimiento que permita operar aditivamente las fracciones con sentido. Con ello se produce necesariamente una resignificación del concepto de fracción y se supera el conflicto cognitivo suscitado por la excesiva mecanización de los algoritmos, y por la incomprensión de los fundamentos que lo sustentan.

El aporte inmediato de esta investigación, es contribuir a la comprensión del concepto de fracción, y particularmente, al mejoramiento del trabajo aditivo con fracciones.

En los capítulos siguientes se abordan detalladamente los aspectos que constituyen nuestro trabajo de investigación. En el primer capítulo se revisan los antecedentes, el problema de investigación y el objetivo. El capítulo 2 se refiere a los fundamentos teóricos en los que nos basamos para realizar esta investigación, y el tercero, a los metodológicos. El cuarto capítulo da cuenta de las diversas fases que constituyen el diseño de una secuencia didáctica. En el capítulo 5 analizamos los resultados de la puesta en escena, y en el sexto establecemos las conclusiones de la investigación. El último capítulo, presenta las referencias bibliográficas que hemos utilizado a través de las diversas fases del presente trabajo.

# 1 Antecedentes y problema de investigación

## 1.1 Antecedentes

Históricamente, la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones ha conflictuado a estudiantes y profesores. En la búsqueda de una explicación a dicha dificultad, se han realizado numerosas investigaciones en diversas partes del mundo (Charalambous y Pitta-Pantazi, 2005; Fandiño, 2005; Flores, 2010; T. E. Kieren, 1988; S. Llinares y M. V. Sánchez, 1997; Perera y Valdemoros, 2007)

En la actualidad, una de las hipótesis que ha cobrado más peso es la que establece una relación con su *carácter polisémico*, es decir, la multiplicidad de significados[4] asociados a las fracciones sería un factor preponderante que dificulta su aprendizaje.

En la investigación titulada *Significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria* Flores *(2010)*, confirma dicha hipótesis señalando que *la variedad de significados asociados a la fracción es la razón principal de las dificultades con el concepto y con sus operaciones*. *(Flores, 2010, p. 93)*. La investigación realizada por Flores (2010) contempló una revisión de investigaciones relacionadas con los significados de los números fraccionarios, un análisis del programa de estudio y de tres series de libros de texto de la escuela secundaria en México, y la aplicación de un cuestionario de problemas a estudiantes secundarios.

A través de su trabajo, Flores pudo determinar que en el discurso matemático escolar mexicano están presentes al menos 11 de los 14 significados asociados a la noción de fracción revisados. Mediante el análisis de las producciones de los estudiantes fue posible constatar que uno de los significados más presente es el de y que hay escasa presencia de nociones como equivalencia, partición y unitización. Se evidenciaron dificultades con la presencia de varios significados en un mismo problema; con los cambios de registro (geométrico, algebraico); y particularmente con los cambios de referente, cuando es preciso arribar a una "nueva unidad" para solucionar el problema (unitización). Por otra parte, se constató que los estudiantes recurren al trabajo con números decimales para evitar hacerlo con las fracciones.

La nutrida revisión de las investigaciones mexicanas recientes en torno al tema que realiza Flores (2010) evidencia la preocupación por el significado. Figueras (1988, citado por Flores, 2010) en su investigación denominada *Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionales*, en la que trabajó con niños de 1° grado de educación secundaria en México (11 a 14

[4] Hay múltiples acepciones para el concepto de significado. Para Saussure(1945), es el contenido mental que se le da a un signo lingüístico, en cambio Wittgenstein (1922) plantea que éste deviene del uso, de la función del signo. En el ámbito de la matemática educativa, consideraremos la definición propuesta por Flores, (2010) "el significado de un concepto matemático descansa fundamentalmente en las situaciones que nos permiten describir y en los problemas que nos permiten resolver de una manera eficaz"

años), llegó a establecer que los niños tenían concepciones erróneas del concepto. Ávila y Mancera (1989, citado por Flores, 2010), en *La fracción: una expresión difícil de interpretar,* investigación realizada con niños de sexto año de educación primaria y de 1° de secundaria, establecieron que los libros de texto introducen aisladamente diversas interpretaciones del concepto de fracción: "como parte de una magnitud continua o discreta (figuras geométricas o colecciones de objetos), como porcentajes, como razones y como medida"(citado por Flores, 2010, p. 18), y detectaron que los estudiantes tenían dificultades para establecer la relación parte-todo y para ir más allá de las conceptualizaciones basadas en el "modelo del pastel" (Ávila y Mancera, 1989, citada en Flores 2010). En *La construcción del lenguaje de las fracciones y de los conceptos involucrados en él*, (Valdemoros, 1993, citado en Flores 2010), la autora concluye que los estudiantes manifiestan una yuxtaposición de representaciones de distinta naturaleza. En *La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria*, Block (2001, citado por Flores, 2010) investiga "la forma en que la noción de razón – en situaciones determinadas – subyace a ciertas nociones que son objeto de enseñanza en la escuela: medida y aplicación, número natural y racional" y concluye que dicha noción es la base o andamiaje sobre el que se construyen otros significados de las fracciones

Respecto a investigaciones realizadas fuera de México, Flores (2010) se apoya fuertemente en la obra de Fandiño (2005, citada por Flores, 2010) quien, en su investigación *Aspectos didácticos y conceptuales de las fracciones,* realiza una revisión, a lo largo de 6 años, de muchísimos trabajos en torno a las fracciones, lo que, por una parte, le permite distinguir las tendencias de los estudios sobre fracciones en diversos periodos de tiempo entre los años 1960 y 2005, y por otra, le permite recopilar información acerca de los significados de las fracciones.

Fandiño distingue tres periodos de tiempo, en los cuales está siempre presente el tema de los significados. En el primer periodo (1960 a 1980) el problema de los significados era la tendencia central. En el segundo (1980 a 1990), además se incluyen otros tópicos tales como la relación entre las fracciones y los números decimales, el aprendizaje en general y el aprendizaje de la operatoria; en este periodo, surgen con fuerza los planteamientos de Brousseau en relación con la enseñanza de los números decimales y la preocupación por el número racional en EEUU, que en adelante se tornarán muy relevantes. De manera que en el último periodo, (1990 a 2005) las investigaciones se refieren a áreas más específicas: fracciones, números decimales, números racionales y algunas combinaciones como: fracciones y números racionales, y fracciones y números decimales (Flores, 2010, p. 16).

Es así como a través de la revisión de las investigaciones de cada uno de dichos periodos, Fandiño llegó a establecer 14 significados distintos para el concepto (Fandiño, 2005, citado por Flores, 2010):

1. La fracción como parte de un todo a veces continuo, a veces discreto.
2. La fracción como cociente.
3. La fracción como razón.
4. La fracción como operador.
5. La fracción en probabilidad.
6. La fracción en los puntajes.

7. La fracción como número racional.
8. La fracción como punto de una recta orientada.
9. La fracción como medida.
10. La fracción como indicador de una cantidad de elección en el todo
11. La fracción como porcentaje.
12. La fracción en el lenguaje cotidiano.
13. La conceptualización de la fracción en la teoría de Vergnaud.
14. La conceptualización signo – objeto de Duval

En un trabajo posterior, que Valdemoros realiza junto a Perera, *Propuesta didáctica para las enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria* (Perera y Valdemoros, 2007), las autoras plantean un alternativa didáctica para enseñar algunos significados asociados a las fracciones en cuarto grado de educación primaria en México. Pero esta vez el énfasis está puesto no sólo en los significados que piensan es pertinente abordar, sino en la manera de abordar el proceso de enseñanza aprendizaje, explícitamente señalan que su objetivo fue:

> *Establecer si una enseñanza matemática* ***realista y lúdica****, realizada con un enfoque* ***constructivista****, propiciará en el niño de cuarto grado de educación primaria la elaboración de la noción de fracción y los significados de medida, cociente intuitivo y la idea embrionaria de operador multiplicativo (Perera y Valdemoros, 2007, p. 2, las negritas no corresponden al original).*

Para ello, inicialmente, aplicaron un cuestionario a 30 estudiantes de 9 años de edad que les permitió saber lo que conocían los niños acerca de las fracciones y seleccionar tres estudiantes para un estudio de casos. El cuestionario contempló tres bloques en los que se abordan las fracciones como medida, como cociente intuitivo (reparto) y como operador multiplicativo, respectivamente. En segundo lugar, implementaron un programa constructivista de enseñanza que aborda la fracción en los tres significados mencionados, a través de situaciones lúdicas vinculadas a la vida real. Por último, aplicaron un cuestionario final en el que se plantearon tareas análogas a las del cuestionario inicial. Las autoras concluyen que su programa favoreció la consolidación de las nociones relativas a la fracción, salvo en el caso de la fracción como operador multiplicativo, puesto que los niños lograron realizar tareas que implicaban reducir los lados de una figura a la mitad, pero un grupo importante no lo logró cuando se les pedía los redujeran a un tercio. Este estudio entrega interesantes elementos en relación a las implicancias del trabajo con algunos significados de las fracciones, pero no analiza específicamente el tema de la operación con fracciones.

La revisión hecha con anterioridad, nos permite afirmar que los significados asociados a las fracciones, efectivamente inciden en la manera en que éstas se aprenden, pero, tal como observamos en el último trabajo no son el único factor a considerar.

**Las fracciones en el curriculum chileno**

En el curriculum chileno, las fracciones se abordan en cuarto, quinto y sexto año básico. En cuarto se introduce la noción, en quinto se aborda la operatoria aditiva y en sexto la multiplicativa.

Según lo indican los Programas de estudio del Ministerio de Educación (2006b), las fracciones se debiesen introducir en cuarto año básico

> *… como números que dan respuesta a situaciones en que no se puede cuantificar a través de los números naturales. En efecto, las fracciones permiten cuantificar trozos o partes de objetos, colecciones o unidades de medida. Se trata de que alumnos y alumnas, a través de actividades con material concreto, puedan identificar, representar, leer, escribir y resolver situaciones problemáticas en las que participan las fracciones de uso más frecuente, como son, por ejemplo, medios, tercios, cuartos, décimos y centésimos* (Mineduc, 2006b, p. 142)

Pese a que el enfoque propuesto por el Ministerio de Educación alude al sentido amplio de la fracción, y a que indica expresamente que se trabajen situaciones de reparto equitativo: *Por ejemplo, repartir 5 papeles entre 2 niños o niñas. Se trata de que descubran que cumplir la tarea significa darle a cada uno 2 papeles enteros y el que sobra deben partirlo para poder continuar con el reparto* (Mineduc, 2006b, p. 180), usualmente se lo aborda exclusivamente como una parte de un todo que ha sido dividido en partes iguales, quizás porque es el significado más conocido y asimilado por los profesores, y no sienten la misma seguridad al abordar otras interpretaciones.

Posteriormente, en quinto básico se aborda la operatoria aditiva, y en sexto, la multiplicativa. En ambos casos, implícitamente, se suelen ampliar los significados asociados a las fracciones a través del trabajo con los textos escolares. Sin embargo, los docentes no son conscientes de ello, ni de las implicaciones epistemológicas que trae consigo cada una de estas nuevas interpretaciones, producto de que los argumentos iniciales (construidos al seno del significado parte-todo) ahora resultan insuficientes para abordar algunas situaciones problemáticas. Por ejemplo, en aquellas las que la medida de una porción o de una cantidad es mayor que la unidad naturalmente surge la pregunta respecto de la posibilidad de utilizar más partes de las que tiene un entero. En aquellas en las que el entero a repartir es mayor que una unidad, como "al repartir dos chocolates entre seis personas a cada una le toca un tercio" surge el siguiente conflicto ¿cómo es posible que a cada una le toque un tercio si eran seis personas y no tres? O el relativo al cambio de referente ¿Cómo un tercio (de chocolate) puede ser un sexto (del reparto)?.

El programa de estudio de quinto básico, cuando se refiere a los contenidos, menciona que se abordarán las fracciones *en situaciones correspondientes a diversos significados (partición, reparto, medida...)* (Mineduc, 2006a, p. 88), pero no explica en qué consiste cada uno de esos significados, ni reflexiona en torno al trabajo con ellos. Las orientaciones didácticas son bastante escuetas en este sentido, señalan que el objetivo del trabajo referido a la unidad de fracciones es

> *… ampliar y profundizar el uso y el conocimiento sistemático de las fracciones como signos que permiten dar cuenta de acciones de fraccionamiento, como*

*razones y con un status de números; es decir, que se pueden ordenar y se puede operar con ellas, avanzando progresivamente a la asociación, en términos generales, de un entero a la unidad (uno)… (Mineduc, 2006a, p. 89)*

y entrega algunas orientaciones referidas a su trabajo didáctico en las que se sugiere realizar un trabajo contextualizado *en el que las regularidades, el lenguaje, las equivalencias se visualizan en la resolución de problemas numéricos y geométricos, con apoyo de materiales concretos y de representaciones gráficas*, apoyarse en el trabajo con la recta numérica para asociar la idea de entero a la noción de unidad y trabajar con el sistema de medidas incluyendo múltiplos y submúltiplos de ellas (Mineduc, 2006a, p. 89).

En relación con la operatoria aditiva con fracciones el programa de quinto básico indica que deben ser realizadas *con y sin apoyo de materiales concretos y representaciones gráficas, poniendo el acento en el uso de fracciones equivalentes, en la estimación de resultados y su evaluación y comprobación (Mineduc, 2006a, p. 90)* y no se refiere específicamente a los algoritmos.

El algoritmo más tradicional, aún en uso, es el que utiliza el *mínimo común denominador*. Al revisar bibliografía específica que abordara el algoritmo aditivo en el sistema escolar, descubrimos que por lo menos data de la primera mitad del siglo pasado. El profesor Manuel Lara, en el año 1951, escribe un libro de aritmética para el primer año de humanidades (equivalente al primer año de secundaria, o al séptimo año básico chileno actual) en el que aborda la adición de fracciones del siguiente modo:

*Para sumar fracciones de distinto denominador se las reduce a fracciones que tengan el mismo denominador y enseguida se ejecuta la suma. El denominador común es el M.C.M. entre los denominadores.(Lara, 1951, p. 238)*

El procedimiento para determinar el mínimo común múltiplo, se ha explicado previamente como sigue:

*Para determinar el M.C.M. entre dos o más números, por divisiones sucesivas, se colocan estos números en renglón y enseguida se* ***divide por el menor número primo*** *que divida alguno de los números dados. El cociente se escribe debajo del número que fue dividido y se escriben de nuevo los números que no eran divisibles por ese número primo. A los números del segundo renglón se dividen por el* ***menor número primo*** *que pueda dividir a algunos de ellos y tenga como cociente final 1 en todas las columnas.(Lara, 1951, p. 233)*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 14 — | 24 | 2 | |
| 7 | 12 | 2 | |
| 7 | 6 | 2 | M. C. M. = $2^3 . 3 . 7$ |
| 7 | 3 | 3 | M. C. M. = 168 |
| 7 | 1 | 7 | |
| 1 | | | |

**Ilustración 5**

La explicación alude al uso de una tabla de descomposición prima aún en uso. Finalmente, se deben multiplicar los factores primos (ilustración 5).

La reducción de fracciones con distinto denominador a fracciones con un mismo numerador se explica en otro apartado:

> *…se busca el M.C.M. entre los denominadores* ***y ese M.C.M. es el denominador común*** *de todas las fracciones propuestas.*
> *Enseguida se amplifica cada fracción por un número tal que el denominador se convierta en denominador común. Se divide el M.C.M entre los denominadores por cada denominador y el cociente obtenido multiplica al numerador correspondiente. Este producto, es el nuevo numerador de la fracción(Lara, 1951, pp. 234, 235).*

Es decir, cada uno de los procedimientos implicados en la adición de fracciones es abordado separadamente, sin asociar cada paso a un fundamento, ni a un contexto que les dé significado.

Esta misma secuencia de procedimientos para abordar la adición de fracciones: calcular mínimo común denominador mediante tabla de descomposición prima, luego igualar denominadores mediante amplificación o simplificación, para finalmente “sumar los numeradores y conservar el denominador”, continúa en uso hasta hoy.

Otra variante de este procedimiento son la de la multiplicación cruzada y la de cuántas veces cabe, ambas parten de la premisa que no se pueden sumar fracciones si no tienen igual denominador:

> i) Se multiplican los denominadores entre sí, generando el denominador de la suma. Luego se multiplica en forma cruzada el denominador de una fracción con el numerador de la otra y se generan dos sumandos a anotar en el numerador. Estos últimos se suman y se genera el numerador de la suma.
>
> ii) Se multiplican los denominadores para generar el denominador de la suma. Y luego, para generar el numerador se formula la pregunta cuántas veces cabe el numerador de cada fracción en este nuevo denominador, la respuesta indica el número por el que se debe multiplicar el numerador para generar uno nuevo. Se repite el procedimiento con el numerador del otro sumando, y se suman los nuevos numeradores.

Como podemos observar, todos los procedimientos descritos abordan los términos de la fracción como entes separados, y si bien hacen hincapié en la necesidad de igualar los denominadores, no es fácil comprender por qué se hace lo que se hace.

## 1.2 Problema de investigación y objetivo

La experiencia docente de muchos profesores y profesoras indica que trabajar con fracciones constituye una dificultad no menor para los estudiantes, incidiendo en la calidad de sus aprendizajes. En particular, los mayores conflictos que se observan en el aula se producen a la hora de operar con ellas. Los análisis de las producciones de los estudiantes (Centro Felix Klein, 2010) muestran, con más frecuencia de la deseada, que los estudiantes las abordan en forma parcelada, como si una fracción fuese un número compuesto por dos entidades independientes, el numerador y denominador. Llinares y Sánchez (1997)sostienen que los estudiantes operan con ellos haciendo una extensión de los algoritmos construidos para el trabajo con los números naturales, al trabajo con las fracciones.

Para llegar a conceptualizar la fracción como un número racional, es necesario abordarla desde las distintas situaciones contextuales que han dado origen a sus diversos significados. En el apartado anterior, hemos puesto de manifiesto que una de las características que hacen del concepto de fracción un tema matemático complejo es su polisemia. A través de dicha revisión, hemos observado que esta multiplicidad de significados incide en el aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, ¿será la polisemia el factor más preponderante en las dificultades de aprendizaje de las fracciones? Tratar las fracciones con sus distintos significados, ¿será suficiente para superarlas? El carácter múltiple de este concepto constituye una de las variables didácticas que incide su aprendizaje, pero también la forma en que se le aborda en el Discurso Matemático Escolar (en adelante DME), dificulta su conceptualización como un número racional, cuya principal funcionalidad es expresar cantidades continuas. Como ejemplo de esto, la investigación de Perera y Valdemoros (2007) aborda la polisemia del concepto de fracción, no sólo contemplando el trabajo con más de un significado o interpretación de la fracción, sino aspectos relativos a la estrategia didáctica con que se le aborda.

Sin embargo, no sólo el trabajo conceptual en torno a las fracciones es un tema difícil de abordar por alumnos y profesores, sino que también a nivel operatorio se presentan grandes dificultades. Dado que la operatoria es el medio por el cual se resuelven las situaciones problema, en donde se contextualizan y adquieren sentido cada una de las interpretaciones que hemos mencionado, nos interesa indagar en el proceso de construcción de la operatoria, para identificar qué variables debemos considerar para que los algoritmos utilizados tengan sentido para los estudiantes, y cómo este trabajo permite contribuir al asentamiento de algunas de las interpretaciones mencionadas.

En particular, queremos plantear una propuesta que permita dotar de sentido tanto al concepto como al algoritmo aditivo. Nos interesa abordar el algoritmo aditivo, porque las situaciones problemáticas que se resuelven con adiciones, son las que surgen con más naturalidad en los primeros años de la escolaridad, y por lo mismo, persisten más en el tiempo, y también porque el nivel de complejidad del algoritmo aditivo en sí, es mayor que el de los algoritmos multiplicativos.

A partir de aquí, definimos la pregunta que guía esta investigación:

> ¿Qué características debería tener una propuesta didáctica que busque resignificar el algoritmo aditivo promoviendo la comprensión tanto del concepto como del propio algoritmo?

Una vez que nos insertamos en el trabajo operatorio para resolver problemas, lo procedimental y lo conceptual no se pueden disociar como aspectos distintos. No es posible trabajar la operatoria por sí sola porque se fundamenta en el concepto.

Valdemoros y Perera (2007) hicieron un gran aporte en cómo trabajar el concepto, lo que proponemos aquí es una propuesta de trabajo conjunto que relaciona concepto y procedimiento.

Como el procedimiento operatorio no puede vivir sin una noción conceptual, planteamos, la resignificación del concepto como medio para la resignificación del procedimiento.

Por lo tanto, esta investigación tiene como objetivo general:

- Construir una propuesta didáctica que a través de un trabajo conceptual resignifique el algoritmo para operar aditivamente con fracciones.

Para construir esta propuesta, utilizaremos la ingeniería didáctica (Douady, 1996) como metodología, de manera que el objetivo general se operacionalizará en las siguientes fases:

- Diseñar una secuencia de actividades
- Experimentar esta propuesta para tener evidencias tanto de las hipótesis que sustentan las actividades como de los procesos de aprendizaje de los estudiantes.
- Analizar dichos resultados, para ser incorporados en una propuesta final.

# 2 Marco Teórico

Para abordar esta problemática, hemos utilizado principalmente la aproximación teórica, proporcionada por La Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau (1986), y las nociones de convención matemática (G. Martínez-Sierra, 2005), de tarea y técnica (Chevallard, 1999) y de resignificación (M. García y G. Montiel, 2007).

Brousseau nos permite entender las relaciones entre los distintos actores del sistema didáctico, y nos brinda categorías para analizar las diversas situaciones que surgen en una situación de aula. La noción de convención matemática de Martínez Sierra y la de resignificación de García y Montiel se utilizan para dar cuenta del proceso de construcción social del conocimiento matemático. En este caso, queremos utilizar un proceso de convención matemática en momentos puntuales en el transcurso de construcción del algoritmo, y el concepto de resignificación pensamos debe recorrer toda la secuencia. Las nociones de tarea y técnica de Chevallard se utilizan para hacer algunas distinciones específicas en la actividad de aula.

## 2.1 Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD)

Para comprender y analizar lo que ocurre en una situación de enseñanza aprendizaje al interior del aula, y para el diseño de la secuencia didáctica, tomamos los siguientes planteamientos de la teoría de situaciones didácticas de Brousseau:

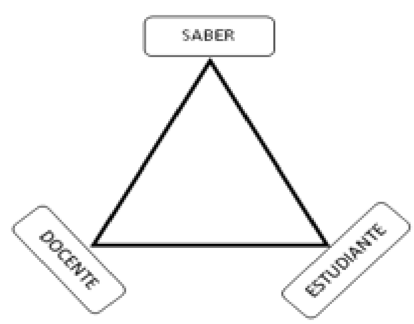
- En el proceso de aprendizaje de las matemáticas en el aula participan el *conocimiento matemático, los estudiantes* y *el profesor*. La interacción entre estos tres polos (ilustración 6) da vida a las **situaciones didácticas** definidas por Brousseau (1986) como:

  > *Un conjunto de relaciones explícitas y/o implícitas entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución.*

- Esta tríada de elementos, comúnmente llamada triángulo didáctico, da origen a tres dimensiones de análisis de los fenómenos didácticos surgidos:

  a) La dimensión epistemológica, referida a las características del **saber** a enseñar. Dicho conocimiento se ha desarrollado a través de la historia y es poseedor de una naturaleza propia.

  b) La dimensión cognitiva, asociada a las características del conocer. Es decir, cómo conocen los y las **estudiantes**.



c) La dimensión didáctica, referida al funcionamiento del sistema didáctico, y a cómo el **docente** conduce o facilita la construcción del conocimiento por **Ilustración 6** parte del estudiante.

- Al interior de una situación didáctica, la relación entre profesores y estudiantes está regida por un conjunto de comportamientos interrelacionados: aquellos que el profesor espera de los y las estudiantes y aquellos que los y las estudiantes esperan del profesor (responsabilidades, plazos, uso o no de ciertos recursos, etc). Este conjunto de pautas de comportamiento, es denominado **contrato didáctico** (Brousseau, 1986), y de él se desprenden reglas explícitas e implícitas acerca de lo que cada uno debiese hacer y exigir al otro en una actividad de aula.

- Los saberes sufren un proceso de **transposición didáctica** mediante el cual el saber sabio es transformado en saber enseñado; sin embargo, usualmente, la forma de presentar los contenidos en el aula *elimina completamente la historia de los saberes* (Brousseau, 1986)

- La evolución del comportamiento de los y las estudiantes en relación con **su** proceso de apropiación del saber depende de las características y **condiciones** presentes en la situación didáctica. El control de dichas condiciones o variables didácticas "permitirá reproducir y optimizar los procesos de adquisición escolar" del conocimiento en estudio (Gálvez, 1994, p. 40)

> *Una parte importante del análisis de una situación didáctica, lo constituye la identificación de las variables didácticas y el estudio, tanto teórico como experimental, de sus efectos. Lo que interesa son los intervalos de valores de estas variables que resultan determinantes para la aparición del conocimiento que la situación didáctica pretende enseñar. Se trata de apreciar las condiciones de las que depende que sea ése el conocimiento que interviene y no otro. (Gálvez, 1994, p. 44)*

- Las **variables didácticas**, entonces, son aquellos elementos de la situación que pueden ser controlados y modificados por el docente, para provocar un cambio de estrategia en los y las estudiantes de manera que pueda llegar al saber matemático deseado.

Considerando dichas ideas claves, Gálvez (1994) describe muy bien cuál debe ser el foco de análisis de las situaciones de aula:

> *El objetivo fundamental de la Didáctica de las Matemáticas es averiguar cómo funcionan las situaciones didácticas, es decir, cuáles de las características de cada situación resultan determinantes para la evolución del comportamiento de los alumnos y, subsecuentemente, de sus conocimientos.*

Por otra parte, Brousseau establece una clasificación de situaciones experimentales, según la acción que están realizando los estudiantes. Distingue cuatro tipos:

a) situaciones de **acción** en las que los y las estudiantes interactúan con el medio físico para resolver la tarea o problema encomendado
b) situaciones de **formulación**, en la que las y los estudiantes se comunican informaciones entre sí, discuten estrategias, etc
c) situaciones de **validación**, en las que los y las estudiantes deben elaborar pruebas para convencer a otros sobre la validez de sus afirmaciones

d) situaciones de **institucionalización**, en las que participan tanto profesores como estudiantes, puesto que se trata de estos últimos asuman la significatividad de un conocimiento construido por ellos mismos en las situaciones previas, como una convención social. (Gálvez, 1994)

## 2.2 Las nociones de Tarea y Técnica

Para organizar algunos aspectos específicos de la actividad matemática en el aula, utilizaremos algunas nociones propuestas por Chevallard en su Teoría Antropológica de lo Didáctico (en adelante TAD)

Para Chevallard el conocimiento matemático es producto de una **actividad humana** que involucra tareas que resultan problemáticas para una determinada comunidad en un momento específico y es producto de un proceso de estudio. En concordancia con ello, propone una modelización de la actividad matemática.

Tomando como unidad de análisis la noción de la organización matemática (OM), Chevallard plantea un modelo praxeológico que distingue los elementos asociados al saber hacer, de los fundamentos que explican dicho saber hacer. Al primer grupo de elementos los denomina bloque práctico-técnico cuyo foco es el *saber hacer*, allí es posible distinguir tipos de tareas y **tareas** específicas a resolver por los estudiantes, y **técnicas** mediante las cuales se realizan esas tareas. El segundo bloque, denominado bloque tecnológico-teórico, se concentra en el *saber*. Comprende las descripciones, explicaciones y justificaciones de las técnicas que se utilizan, agrupadas bajo el nombre de tecnología; y también el discurso que, a su vez, describe, explica y justifica la tecnología: la teoría.

Para la evolución de la secuencia didáctica, utilizaremos las nociones del bloque práctico técnico (tarea y técnica) y articulándolas con la noción de **variables didácticas** de Brousseau, por cuanto estas últimas, posibilitan graduar tanto el grado de dificultad de la tarea a la que se enfrenta el estudiante como la o las técnica(s) que utiliza para resolverla

Las *tareas* son las actividades concretas a desarrollar por los estudiantes: problemas, ejercicios, demostraciones, construcciones geométricas, etc. Y las *técnicas* son los procedimientos utilizados para llevar a cabo esas tareas. Es interesante notar que pese a que en el ámbito de las matemáticas, las técnicas suelen considerarse universales, Chevallard señala que estas varían de institución en institución:

> *…en una institución I dada, y a propósito de un tipo de tareas T dado, existe en general una sola técnica, o al menos un pequeño número de técnicas institucionalmente reconocidas, con la exclusión de técnicas alternativas posibles -que pueden existir efectivamente pero en otras instituciones.(Chevallard, 1999)*

El objetivo último de la secuencia didáctica contenida en esta investigación, es que los y las estudiantes construyan un procedimiento (una técnica) para sumar fracciones, y que a través de dicho proceso de construcción puedan resignificar la técnica que han conocido en su institución educativa. Por lo tanto, la progresión de tareas propuestas en la secuencia didáctica será construida considerando la relación entre las condiciones o variables presentes en cada una de ellas y las técnicas que esperamos vayan construyendo los y las estudiantes para resolver dichas tareas. De manera de promover la apropiación paulatina del saber en cuestión: la operatoria aditiva con fracciones.

## 2.3 La noción de Convención Matemática.

Por otra parte, se utiliza la noción de convención matemática con la intención de cuestionar la idea de validez universal del conocimiento matemático e invitar a preguntarse sobre las condiciones sociales de dicha validez convencional.

Cada vez son más los enfoques que contradicen la idea de la "pureza" del conocimiento matemático, dando cuenta del rol de lo social en su constitución: la noción de contrato didáctico de Brousseau señala la importancia del contexto escolar en las situaciones de aprendizaje, la teoría antropológica de Chevallard pone en el tapete el rol de las instituciones (G. Martínez-Sierra, 2005), y la teoría de las representaciones sociales (Jodelet, 2000), releva el papel del conocimiento de sentido común en la construcción del conocimiento matemático.

La noción de convención matemática también se refiere a la importancia de lo social en la construcción del conocimiento matemático. El concepto surge al seno de la aproximación socioepistemológica en Matemática Educativa, cuya característica fundamental es incorporar la dimensión social en la construcción del conocimiento matemático. La socioepistemología es una aproximación teórica sistémica que considera que el conocimiento no sólo es el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas puesto que dicho proceso ocurre en un escenario socialmente situado.

En el marco de dicha línea de investigación, surge la noción de convención matemática como un proceso constituyente en la construcción del conocimiento matemático. El concepto se origina a partir de una investigación que aborda las dificultades para brindar significado a potencias con exponentes no naturales. El estudio histórico epistemológico mostró que:

> *El significado de los exponentes no naturales es* convenido *para posibilitar la construcción de cuerpos unificados y coherentes de conocimiento* matemático *(es decir para la integración sistémica de conocimientos).* (Martínez-Sierra, 2009)

A partir de allí se generaliza esa forma de construcción como convención matemática. Es decir, la convención matemática es una práctica social, y un proceso funcional cuyo objetivo es lograr una integración sistémica de un conjunto de conocimiento. (Martínez-Sierra, 2009)

En sus cortos años de existencia, el concepto de convención matemática, ha sido útil para explicar algunos fenómenos didáctico-cognitivos y también para interpretar procesos epistemológico-cognitivos.

En este estudio en particular utilizamos la noción de convención matemática para explicar parte del fenómeno didáctico–cognitivo que se expresa en las múltiples dificultades para operar aditivamente con fracciones. Las cogniciones asociadas a la comprensión del algoritmo para operar aditivamente con fracciones, producen conflictos cognitivos tanto en estudiantes como en profesores, y el manejo escolar de dichos conocimientos reproduce y perpetúa el fenómeno didáctico observado. Específicamente, en esta investigación se propicia que los y las estudiantes convengan un algoritmo que articule el procedimiento mismo con los fundamentos matemáticos que lo sustentan.

## 2.4 La noción de Resignificación

La noción de resignificación también se utiliza en este estudio para dar cuenta de la vida social de un conocimiento. Tal como plantean García y Montiel (2007), "buscar la resignificación de un concepto supone que los estudiantes han tenido ya un acercamiento escolar del mismo" (p. 160), y en este trabajo, al igual que las autoras, buscamos romper con las formas tradicionales de enseñanza del algoritmo aditivo para fracciones.

De esta manera pretendemos tomar distancia de la idea que habla de la existencia de conceptos puros, inmodificables, como si algún decreto divino les hubiese dado origen independiente de la existencia humana. García y Montiel, (2007) señalan que "La noción de resignificación busca hacer una distinción de origen con respecto a la idea platónica que establece la preexistencia de los objetos y procesos matemáticos y que implica considerar la unicidad de los significados. La noción de resignificación emerge, entonces, como elemento para dar cuenta de que el conocimiento tiene significados propios, contextos, historia e intensión; lo que señala la posibilidad de enriquecer el significado de los conocimientos en el marco de los grupos humanos" (P 159)

.

# 3 Marco metodológico:

Para la construcción de la secuencia didáctica se utilizará la ingeniería didáctica como metodología de investigación.

### 3.1.1 Ingeniería Didáctica

La ingeniería didáctica surge en Francia en la década de los ochenta como método para las realizaciones tecnológicas de investigaciones realizadas en el marco de la TAD y la TSD.

Su nombre se analoga a la actividad ingenieril en el sentido de que cuando se lleva a cabo un proyecto éste debe realizarse bajo ciertos cánones científicos, peo también debe trabajar con objetos que están fuera del marco de las ciencias.

Este término es utilizado en el ámbito de la didáctica de las matemáticas en dos sentidos: como metodología de investigación y como producción de situaciones de enseñanza y aprendizaje.

> E*l término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos. A lo largo de los intercambios entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos en función de las decisiones y elecciones del profesor. Así, la ingeniería didáctica es, al mismo tiempo, un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso, resultante de una adaptación de la puesta en funcionamiento de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase."* Douady (1996, p. 241)

La ingeniería didáctica como metodología de investigación se caracteriza por tener un esquema experimental sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza, y por el registro de los estudios de caso. Su validación es esencialmente interna, pues está basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori (De-Faría, 2006)

Es una investigación a nivel de micro-ingeniería, pues su objeto de estudio es un tema local determinado y porque interesa considerar los fenómenos al interior del aula.

**Etapas o fases del proceso**, se distinguen cuatro fases (ilustración 7): análisis preliminar; diseño y análisis a priori de las situaciones didácticas; experimentación; y análisis a posteriori y evaluación.

1. **Primera fase, Análisis preliminares**: Tiene por propósito establecer los elementos teóricos generales y los conocimientos didácticos relativos al tema en estudio, que deben ser atendidos para la construcción de la situación didáctica. En este caso consideraremos:

a) Análisis de la naturaleza del concepto y de los algoritmos aditivos

b) Un análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.

c) Cómo se enseña la operatoria con fracciones, entrevistas a profesores y análisis de textos

2. **Segunda fase, Diseño y análisis a priori de las situaciones didácticas**:

Se selecciona un determinado número de variables del sistema que se articularán de determinada manera para controlar los comportamientos posteriores de los estudiantes e intencionar la emergencia de un conocimiento. Este análisis se basa en un conjunto de hipótesis y contempla una parte descriptiva y una predictiva.

3. **Tercera fase, Experimentación:**

Es la implementación de la secuencia didáctica con una determinada población de estudiantes. En ella es necesario explicitar los objetivos de la investigación y las condiciones de realización, establecer el contrato didáctico, aplicar los instrumentos de investigación, registrar las observaciones.

Si la experimentación implica trabajar más de una sesión, es adecuado hacer un análisis a posteriori local, confrontando con los análisis a priori, para poder hacer las correcciones necesarias.

4. **Cuarta fase: Análisis a posteriori y validación**

En esta fase se organiza el conjunto de datos recolectados a lo largo de la experimentación, es decir, en las observaciones realizadas al implementar la secuencia de enseñanza: los registros escritos del observador, los informes de los estudiantes si los hubiese, y los registros de audio o video.

Finalmente, para validar o refutar las hipótesis formuladas en la investigación se confrontan los análisis a priori y a posteriori.

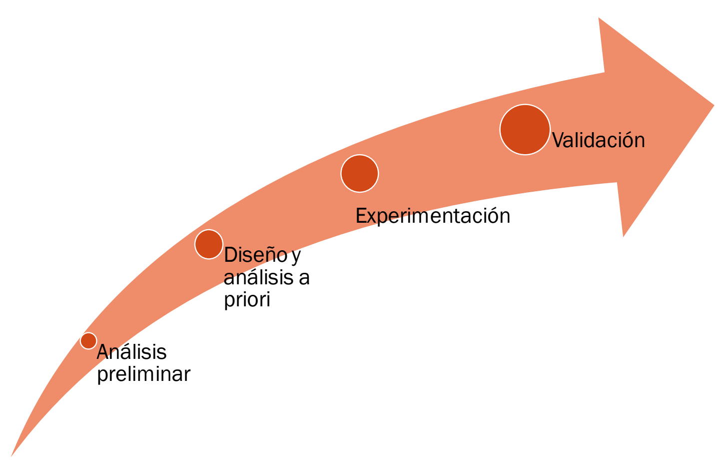



**Ilustración 7**

# 4 Diseño de la secuencia

## 4.1 Fase de planeación: Análisis Preliminar

En este análisis, consideramos primeramente las características del saber matemático en cuestión. Para ello se realizó un análisis de la naturaleza del concepto a través de una revisión acerca del origen y el desarrollo del concepto de fracción. En segundo lugar, analizamos las concepciones de los estudiantes: qué entienden por fracción, qué dificultades reconocen al trabajar con ellas. Con ello, esperábamos poder conocer algunas características cognitivas de los estudiantes y también, algunos elementos relativos al sistema de enseñanza. Por último, profundizamos la dimensión didáctica, explorando cómo se enseña la operatoria con fracciones, mediante un análisis de las concepciones de los profesores y un análisis de texto.

De esta manera esperamos poder determinar cuáles son los elementos epistemológicos, cognitivos y didácticos que intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la operación aditiva con fracciones. Y más específicamente, cuáles son las condiciones en las cuales se constituye la fracción y su operatoria aditiva como un conocimiento funcional para los estudiantes.

### 4.1.1 Análisis epistemológico: El concepto de fracción

#### *4.1.1.1 ¿Por qué surgen las fracciones?*

Llegar a la comprensión del concepto de fracción es un largo camino debido a sus múltiples interpretaciones, sin mencionar a las ya establecidas desde el lenguaje cotidiano, cuestión que suele estar presente en los procesos de aprendizaje de estos temas (S. Llinares y M. V. Sánchez, 1997).

Al hacerse la pregunta ”¿qué son las fracciones?” es necesario preguntarse también cómo surgen, ya que la concepción de una idea matemática va directamente relacionada con su emergencia y evolución histórica. En este sentido, no podemos desconocer que los objetos matemáticos han sido construidos a partir de alguna necesidad social: “todo conocimiento es una respuesta, una adaptación que la humanidad ha logrado ante situaciones que ha enfrentado o ante problemas que se ha planteado” (Gálvez, 1994). Por lo tanto, para entender el sentido de existencia de las fracciones, es preciso investigar qué es aquello que les dio origen.

Según los diferentes registros históricos, todo apunta a que fue la necesidad de medir y de resolver situaciones de reparto, en las que el objeto medido, o la medida de la porción repartida, resultó ser una cantidad no entera, lo que propició la emergencia de lo que hoy llamamos *fracción*. Ya en el *Chóu–Peï*, obra matemática china escrita alrededor del 1200 ac[5], aparecen diversos problemas en los

[5] Algunos historiadores ubican esta obra en el 300 ac.

que se utilizan números fraccionarios. Por otra parte, tanto los griegos como los romanos conocían las fracciones unitarias de los egipcios, pero rehuían realizar cálculos con ellas (Contreras, 2004)

El registro más antiguo relativo a su origen se halla en las civilizaciones babilónica y egipcia. Alrededor del año 2500 ac, los babilonios decidieron uniformar sus medidas para facilitar sus intercambios comerciales. Hasta entonces trabajaban con un sistema de subunidades: la unidad menor era el dedo, 30 dedos componían un codo, y 120 codos una vara (Fowler, 2008). Una medida determinada podía ser expresada en una cierta unidad de medida, por ejemplo siete codos, pero cuando dicha medida no era una cantidad entera, surge la necesidad de fraccionar dicha cantidad, por ejemplo, siete codos y un tercio de codo, permitiendo de esta manera cuantificarla. Como alternativa a este sistema, se utilizaron submúltiplos de dicha medida, o bien unidades de medidas menores para complementar, por ejemplo, siete codos, un palmo y tres dedos. Sin embargo, a la hora de operar con cantidades expresadas de ese modo, por ejemplo, multiplicar, la tarea se volvía compleja. Así, la fracción resultaba ser una noción más eficaz para efectuar dichos cálculos, al estar expresada la medida en una sola unidad.

El concepto de fracción también fue utilizado para medir porciones no enteras de un reparto. En el papiro de Rhind, o papiro de Ahmés, documento escrito hace casi 4000 años (1650 a.c.), es posible apreciar la costumbre egipcia de expresar toda fracción como una suma de fracciones unitarias. Aparece, por ejemplo, la descomposición en fracciones unitaria de la fracción 2/47:

*2/47 = 1/30 + 1/141 + 1/470* (Pulpón, 2008)

Este resultado se explica por la forma en que hacían la repartición. Por ejemplo, si querían repartir 4 panes en partes iguales entre 7 personas, los egipcios dividían cada pan en dos y entregaban medio pan a cada persona. El medio restante, lo dividían en siete partes, cada una de las cuales corresponde a un catorceavo de pan, y repartían una de aquellas partes a cada persona. Por lo tanto, cada invitado recibía $\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$ de pan, lo que en nuestra notación actual equivale a $\frac{4}{7}$ de pan[6] (Pulpón, 2008)

En la medida que se institucionaliza la fracción como un objeto matemático, éste se vuelve un tipo de número que permite expresar la medida de las porciones no enteras. Aún así, seguía resultando complejo operar con la notación egipcia que consideraba sólo fracciones unitarias. Los griegos, por ejemplo, marcaban el numerador con un acento y el denominador con dos; o bien colocaban al denominador sobre el numerador (como actualmente anotamos los exponentes). Finalmente, fueron los hindúes quienes resolvieron el problema de la notación, escribiendo el numerador sobre el denominador. De hecho, los antecedentes más antiguos acerca de la resolución de operaciones con números fraccionarios o quebrados, datan de Aryabhata, en el siglo VI d.C. y Bramagupta, en el siglo VII d.C. Posteriormente, Mahavira, en el siglo IX y Bháskara en el siglo XII, sistematizan la operatoria llegando al algoritmo actual.

[6] Se ha de hacer énfasis en que los egipcios utilizaban casi exclusivamente fracciones unitarias, las únicas excepciones conocidas son las fracciones 2/3 y 3/4

Por su parte, la mayoría del mundo árabe utilizaba una escritura similar a la egipcia para representar fracciones. Pero es a mediados del siglo IX dc cuando Muhammad ibn M usa Al Khw arizm adopta la notación india al redactar un manual sobre aritmética que recoge precisamente toda la tradición matemática india. No es sino hasta el siglo XII que la obra de Al Khw arizm es traducida al latín, y uno de sus grandes difusores -Leonardo de Pisa- comienza a hacer uso de la línea horizontal para representar divisiones originando la notación actual.

El uso social que se ha hecho del concepto de fracción, tanto en las culturas antiguas como en la época moderna, ha estado fuertemente vinculado a una relación parte-todo basada en el reparto equitativo. El ejemplo egipcio es iluminador, ya que ellos separaban el todo en partes, y éstas, a su vez, se repartían equitativamente. Sin embargo, hay otras nociones de fracción que emergen en la historia. Si los egipcios hubieran denotado la repartición del pan como 4/7, éstos hubieran cuantificado la medida de la repartición, y aunque se relaciona con la idea de parte-todo, la concepción predominante en este caso hipotético hubiera sido la fracción como medida. Lo importante de rescatar es que en ambos casos las fracciones se presentan como un constructo matemático que permite expresar medidas o porciones (cantidades) no enteras de una unidad u objeto unitario.

#### *4.1.1.2 Vida actual de las fracciones: modelos teóricos contemporáneos*

Si bien el uso social predominante del concepto de fracción, lo vincula a una relación parte-todo, en la actualidad la fracción es utilizada en distintos contextos situacionales que dan origen a distintos significados.

En el capítulo 1 señalamos que diversos autores han dado cuenta de la multitud de significados en que el objeto *fracción* se ve involucrado, y que se ha llegado a recabar hasta 14 significados: la fracción como parte de un todo, como cociente, como razón, como operador, como probabilidad, en los puntajes, como número racional, como punto de una recta orientada, como medida, como indicador de una cantidad de elección en el todo, y como porcentaje.

Sin embargo, no todos los significados se presentan con la misma fuerza, ni cobran la misma importancia en el sistema escolar. Es el modelo propuesto por Kieren (1988), erigido sobre la base de comprensión del número racional, el que ha logrado un mayor grado de validación social. Dicho modelo concentra los cinco principales significados de fracción:

a) **Fracción como parte-todo o partes de una unidad**: considera la fracción $\frac{a}{b}$ como la relación que existe entre un todo "b" continuo o discreto dividido en partes alícuotas[7], y una parte "a" que indica un cierto número de partes alícuotas del todo.

[7] Se entiende por *partes alícuotas* las que son capaces de medir exactamente a su todo.

b) **Fracción como división o cociente**: la fracción $\frac{a}{b}$ es el resultado de una situación de reparto donde se busca conocer el tamaño de cada una de las partes resultantes al distribuir "a" unidades en "b" partes iguales.

c) **Fracción como resultado de una medida**: se relaciona con su origen histórico correspondiente a expresar una medida tal que no se puede cuantificar con una cantidad entera de unidades de medida. En este caso la unidad de medida se ha dividido en "b" subunidades iguales y se ha repetido "a" veces para completar la medida deseada.

d) **Fracción como operador**: la fracción es un objeto que modifica un valor multiplicándolo por "a" y dividiéndolo por "b", con "a" y "b" números enteros positivos.

e) **Fracción como razón**: la fracción indica una comparación entre dos cantidades a y b citadas en el mismo orden en que han sido comparadas.

Si realizamos una mirada transversal a estas cinco interpretaciones de fracción, podemos notar que en todas ellas, excepto en la fracción como operador, hay un referente. En la interpretación parte-todo, la fracción depende de qué se considera por eso todo; en la interpretación como división se debe tener claridad qué es aquello que se reparte; al considerar la fracción como medida, se debe tener en cuenta la medida que se subdivide; y en la interpretación como razón, la fracción depende de las cantidades que se comparan. Sin embargo, al considerar la fracción como operador, nos acercamos a la idea de la fracción como número, despojado de referente concreto. Relevamos esta vinculación de la fracción al referente dependiendo de su significado, pues influye en las propuestas de actividades que se trabajan con los estudiantes en el aula. Proponer una actividad que utilice un contexto determinado, requerirá la reflexión previa acerca de qué significado se le está dando a la fracción en dicho contexto.

Por otra parte, llegar a conocer funcionalmente cada uno de estos significados o interpretaciones del "mega" concepto de fracción "conlleva el dominio de diferentes estructuras cognitivas, entendidas como esquemas de pensamiento subyacente a las acciones necesarias para desarrollar tareas que implican la idea de número racional" (S. Llinares y M. V. Sánchez, 1997, p. 75) para cualquiera de estas interpretaciones. Estas estructuras cognitivas condicionan significativamente las secuencias de enseñanza de este concepto según el momento de desarrollo en que se encuentre el estudiante.

Como ya se anticipa, es muy difícil aislar cada una de estas interpretaciones para llegar a la comprensión del número racional, ya que en mayor o menor medida, éstas están vinculadas de forma "natural". Para comprender estas relaciones, los trabajos de Behr *et al*. (1983, citado en Charalambous y Panzani, 2005) ofrecen un modelo mediante el cual podemos estudiar las relaciones establecidas (flechas continuas) y las relaciones que se pueden conjeturar (flechas segmentadas). Estos autores proponen una relación entre las diferentes interpretaciones ya señaladas por Kieren y las operaciones básicas de fracciones y la resolución de problemas (ilustración 8).

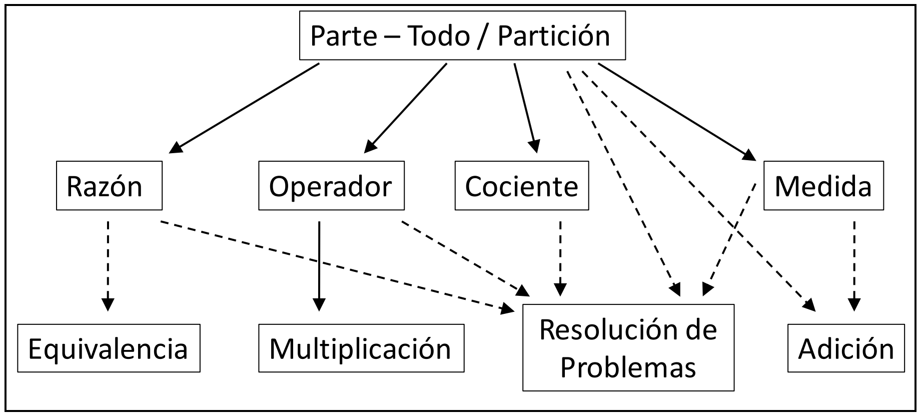



**Ilustración 8**

A partir de este modelo, Charalambous y Pitta-Pantazi (2005) sostienen, en primer lugar, que la interpretación parte-todo y su relación con los procesos de partición, se considera fundamental, aunque no suficiente, para desarrollar una adecuada comprensión de las demás interpretaciones de las fracciones. En cualquier caso, la preponderancia de esta interpretación es lo que justificaría que en muchos currículos este aspecto tome un rol central, sobre todo en los primeros años en que se introduce el concepto de fracción (Baturo., 2004). En segundo lugar, el diagrama sugiere que la interpretación de fracción como *razón* se considera lo más "natural" para promover el concepto de equivalencia, y consecuentemente, el proceso de encontrar fracciones equivalentes. Además, la concepción de *operador* y *medida*, ayudan de gran manera a desarrollar una comprensión solida de la multiplicación y adición de fracciones, respectivamente. Finalmente, comprender las cinco interpretaciones de las fracciones se considera indispensable para llegar a resolver problemas en el campo de las fracciones.

#### *4.1.1.3 La fracción como medida*

En consecuencia con los planteamientos del apartado anterior, nos concentraremos en los significados de fracción como parte-todo y como medida, significados que según el planteamiento de Llinares y Sánchez (1997), corroborado posteriormente por Charalambous y Pitta-Pantazi (2005), están íntimamente relacionados, siendo el primero el fundamento de la interpretación del segundo.

Ya hemos mencionado que el conocimiento matemático surge de contextos históricos y necesidades humanas. Para darle una razón de ser a las fracciones como objeto matemático, reviviremos en esta secuencia didáctica su emergencia histórica poniendo a los estudiantes en una situación en la que deben cuantificar una medida no entera. De esta manera, el objeto fracción surge, al comienzo de la situación didáctica, como un tipo de número que permite expresar "cuánto mide" una cierta longitud, en este caso, una cinta dada[8].

Cuando se trabajan situaciones aditivas con fracciones, es común obtener sumas mayores que un entero que resultan difíciles de significar en el contexto del significado parte-todo, pues surge la siguiente contradicción: *si el todo está dividido en **n** partes, ¿cómo puedo obtener un número de partes mayor que **n**?* Ampliar el concepto de fracción más allá de la idea de parte-todo es lo que permitirá superar esta supuesta contradicción.

La conceptualización de fracción como medida permite al estudiante ser capaz de identificar que una fracción $\frac{a}{b}$ es $a$ veces $\frac{1}{b}$, es decir, que si repite 2 veces $\frac{1}{3}$ obtendrá $\frac{2}{3}$, y si lo repite 4 veces, obtendrá $\frac{4}{3}$. Las situaciones de medición son un contexto propicio y natural en el cual se obtienen habitualmente medidas no enteras mayores que uno o que varios enteros, por lo que resulta más apropiado para que el estudiante signifique las cantidades fraccionarias mayores que el entero. Aun así, la interpretación de fracción como parte-todo no queda fuera, ya que fundamenta la interpretación como medida, lo cual se ve claramente cuando el estudiante observa que al repetir 3 veces $\frac{1}{3}$ obtiene un entero, lo cual se relaciona con que $\frac{1}{3}$ es una parte de un entero que se ha dividido en tres.

#### *4.1.1.4 Consideraciones sobre los algoritmos aditivos*

Pareciera ser que hablar de los distintos significados de las fracciones pone énfasis en lo conceptual más que en lo procedimental. Sin embargo, las concepciones de fracciones, tal como vimos en el esquema de Behr, apuntan a la resolución de problemas, y para ello son necesarias ciertas claridades sobre las operaciones que permiten resolverlos. En particular, en el apartado anterior hemos visto cómo las situaciones de *medida*, junto con las de parte-todo, se relacionan con las situaciones de adición; y es en su operatoria donde deseamos centrar este trabajo.

Al plantearse la enseñanza formal del algoritmo aditivo para fracciones, surgen grandes discrepancias de cómo hacerlo, al contrario del consenso existente en cuanto a las interpretaciones de una fracción. En este punto es conveniente distinguir entre el concepto de la operación y su algoritmo, tal como señalan Llinares y Sánchez (1997):

> *"[Se ha de hacer la distinción entre] comprender el significado de la operación, estando este punto vinculado a la aplicación de la operación en la resolución de situaciones problemáticas, y ser hábil en la ejecución de los pasos necesarios, y en el orden correcto,*

[8] Inicialmente, los estudiantes miden la cinta con una unidad de medida y con partes de dicha unidad. Sin embargo, para poder cuantificar el valor de cada trozo de cinta, han de "repetir" el trozo en la unidad de medida tantas veces como sea necesario. En esa acción, es la noción parte-todo la que les permite saber a qué parte de la unidad de medida corresponde el trozo.

*que llevan a la obtención del resultado de una operación; lo que en lenguaje usual se denomina realizar los cálculos"* (p. 132).

Esta distinción ayuda a sobreponerse a la larga discusión sobre si enseñar o no, o de qué manera, los algoritmos para operar con fracciones. En la gran mayoría de los procesos de aprendizaje, este manejo aritmético se vuelve mecanicista y sin sentido para el aprendiz, lo que lo lleva o bien a reemplazarlos por otros con mayor significado, o bien a modificarlos, convirtiéndolos en procedimientos erróneos. Las razones para este manejo mecanicista son variadas, pero se destaca, por una parte, la introducción demasiado temprana de la enseñanza del algoritmo en la escuela, y por otra, la "introducción desvinculada de un fundamento suficientemente concreto y natural de la operación" (S. Llinares y M. V. Sánchez, 1997, p. 133).

Estas razones hacen ver claramente que no basta con un tiempo prolongado de trabajo sobre los algoritmos, sino una vinculación con el significado de cada uno de los pasos. Es aquí donde se hace necesaria la idea de resignificación de la fracción, a través del estudio de situaciones de medida, que es uno de los contextos originarios de las fracciones. Es importante también tener en cuenta que ciertas operaciones aparecen de forma natural en ciertas situaciones problemáticas, y que en el caso particular de la suma y resta de fracciones se necesita de fracciones equivalentes para desarrollar su algoritmo, cuestión que no ocurre con la multiplicación y división, lo que pone al algoritmo aditivo en un nivel de complejidad mayor para los estudiantes.

Las secuencias de enseñanza para trabajar el algoritmo aditivo de fracciones pueden variar según las consideraciones y las experiencias de cada profesor o profesora. Sin embargo, es claro que se debe ir recorriendo un camino con los estudiantes desde sus propios modelos para sumar y restar fracciones hacia el algoritmo convencional, el cual es de un mayor nivel de abstracción, a la vez que es de mayor eficiencia, al ser capaz de resolver cualquier situación aditiva con fracciones.

Uno de los caminos para lograr esta transición es plantear secuencias donde varíe el tipo de fracción presente en las actividades propuestas (sin dejar de lado la naturaleza de la situación y su relación con las operaciones aditivas). De manera que las primeras situaciones que se podrían plantear corresponden al uso de fracciones con igual denominador (ej. 2/8 + 3/8), ya que para resolverlas solo es necesario un proceso de conteo: dos octavos y tres octavos son cinco octavos, lo que se basa en definitiva en la suma o resta de fracciones unitarias (con numerador 1). Si se representan las fracciones en este tipo de situaciones, se debe tener cuidado al señalar el objeto unidad, y que éste sea el mismo para cada una de las particiones que hemos seleccionado (2 y 3 particiones de 8). La evolución de esta situación, y por tanto la dificultad que se puede presentar, corresponde cuando la "unidad que se cuenta" ya no es la misma en ambos sumandos, es decir, cuando sumamos o restamos fracciones con distinto denominador. Sin embargo, aun se puede utilizar la técnica de "contar" si es que se logra encontrar fracciones equivalentes, llevando este caso al anterior (mismo denominador). Dentro de este tipo de situaciones, se presentan tres casos según la relación entre los denominadores:

a. Fracciones con **denominadores múltiplos entre sí**: $\frac{2}{3}+\frac{3}{6}=?$ , $\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=?$

b. Fracciones con **denominadores primos entre sí**: $\frac{2}{5}+\frac{3}{2}=?$ , $\frac{1}{4}-\frac{1}{9}=?$

c. Fracciones con **denominadores con un factor común**: $\frac{2}{6}+\frac{3}{4}=?$ , $\frac{3}{8}-\frac{2}{6}=?$

En cualquiera de los tres casos, la estrategia implica buscar fracciones equivalentes de modo tal que ambas fracciones queden con un denominador común. En este sentido, no es imprescindible llegar rápidamente al mínimo común múltiplo, ya que éste es un proceso de mayor nivel de abstracción. Aun así, posteriormente es posible potenciar la transición hacia el algoritmo convencional, pero dotado de significado.

**Conclusión del análisis epistemológico**

Con este recorrido por los significados de la fracción y sus relaciones, se evidencia que el concepto es complejo, y que en relación a la enseñanza, es conveniente, como mínimo: considerar objetivos a largo y corto plazo en relación a cada uno de las interpretaciones o significados, seleccionar los apropiados para desarrollar esos objetivos, teniendo en cuenta las estructuras cognitivas necesarias, y proporcionar secuencias de enseñanza (actividades) que contribuyan al desarrollo de estas estructuras.

Específicamente, en relación con la enseñanza de la operatoria aditiva con fracciones, nos parece conveniente:

(a) revivir la emergencia histórica del la fracción como objeto matemático poniendo a los estudiantes en una situación en la que deban cuantificar una medida no entera.
(b) proponer situaciones problemáticas en las que la adición sea la operación que resuelve el problema
(c) que la secuencia aborde la interpretación de medida tanto para conceptualizar la fracción, como para proponer problemas que sean resueltos naturalmente mediante adición.
(d) y la interpretación de razón para promover el concepto de igualdad o equivalencia entre fracciones.

### 4.1.2 Análisis cognitivo: las concepciones de los estudiantes

Este apartado se construyó mediante el análisis de la información recogida a través de tres entrevistas grupales a un total de diecisiete estudiantes de un sexto año básico de una escuela perteneciente al municipio de La Florida, comuna ubicada en Santiago de Chile. Las entrevistas fueron realizadas por la investigadora en la biblioteca del colegio, en horario de clases, en grupos compuestos por cinco o seis estudiantes, y tuvieron una duración aproximada de treinta minutos.

Se utilizó la metodología de entrevista semi-estructurada[9] de manera de poder recoger simultáneamente la mayor cantidad de información acerca del concepto de fracción que tienen los y las estudiantes, y abordar con más profundidad algunos focos importantes.

Las preguntas guía de la entrevista fueron:

- ¿Cuándo conocieron las fracciones? ¿Qué conocen de ellas?
- ¿En qué situación de la vida cotidiana utilizamos fracciones?
- ¿Qué son las fracciones?
- ¿Por qué piensan que se habrán inventado las fracciones?
- ¿Tienen dificultades al trabajar con fracciones? ¿Cuáles son?
- En la suma de fracciones, ¿Por qué se igualan los denominadores?

**Resultados de las entrevistas**

**Fracciones en la vida cotidiana**

El conocimiento acerca de las fracciones al que aludieron inicialmente los estudiantes es el escolar. Todos respondieron que las habían conocido en cuarto año básico, que vieron algunas cosas en quinto básico y que en el presente año habían aprendido a sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones. Ninguno recuerda haber oído mencionar las fracciones en un contexto no escolar.

Tanto cuando dieron ejemplos por iniciativa propia, como cuando se les preguntó en qué situaciones de la vida cotidiana utilizamos o están presentes las fracciones, los estudiantes, mayoritariamente, señalaron ejemplos relativos al reparto de algo con el referente de parte-todo:

-"Cuando cortamos una pizza"
-"cuando partimos una torta"
-"cuando reparto una sandía"

[9] Por entrevista semi-estructurada, entendemos aquella que permite alternar preguntas predefinidas y preguntas espontáneas.

Uno de los diecisiete estudiantes señaló una situación distinta: “en las recetas”, en las que también se utiliza la fracción como medida, y otro señaló que se las utilizaba “en los planos”, en los que la fracción juega el rol de razón.

No hay conciencia de que la fracción se utiliza cuando queremos cuantificar una cantidad no entera, y no en la acción de partir o repartir un objeto fraccionable.

**Concepto de fracción**

Cuando se les solicita que expliquen con sus palabras qué es una fracción para ellos, los estudiantes señalaron:

-“es una parte de un número”

-“es una región que se divide en partes y se consideran algunas”

-“es una mitad de un número

-“se forman al dividir las cosas”

-“es una figura que se divide en partes, se pintan algunas y se saca el resultado” (se refiere e la escritura numérica de la fracción).

Como puede observarse, la definición que subyace en todas las menciones, y en la que todos estuvieron de acuerdo, es que una fracción es una o varias partes de un todo dividido en partes iguales. La mayoría evocaba la imagen del diagrama al hacer la definición.

Al pedirles que explicaran qué podría representar una fracción impropia determinada (5/3), se observaron algunas confusiones derivadas de la dificultad de que el todo sea más que un entero. Tendían a identificar el numerador y el denominador de la fracción por separado como números independientes y los representaban separadamente en algún elemento del diagrama. Algunos establecieron relación directa entre el numerador o el denominador con el número de enteros dibujados. No hay conciencia de que el número de enteros depende de la relación por cociente entre el numerador y el denominador.

Por otra parte, nos llamó la atención el siguiente hecho: un estudiante nombró en reiteradas ocasiones las partes como mitades (“es la mitad de un número que se puede sumar o restar, 5/3 representa cuantas mitades se tienen que repartir para las personas”), independientemente de la cantidad de partes en que se haya dividido el entero. Ningún compañero o compañera del grupo 2 (5 estudiantes) comentó o corrigió el término utilizado. Ello da cuenta del enorme arraigo de la conceptualización de la fracción como un trozo de algo.

**Sentido de las fracciones**

La conversación acerca del sentido de las fracciones se inició con la pregunta ¿por qué piensan que se habrán inventado las fracciones? La respuesta intuitiva, formulada un poco en broma, pero que puede estar dando cuenta de la poca razón de ser que estos estudiantes le encuentran a las fracciones fue “no se les ocurrió nada más que hacer”, o “porque no tenían nada más que hacer”., “tampoco sirve de mucho en la vida cotidiana, siempre nos dicen que tenís (*tienes*) que estudiar matemáticas para que si te dan un vuelto te lo den bien. Sumar o restar es fácil, pero las fracciones…"

Luego, formularon otras respuestas relacionadas con situaciones de reparto:

> -"porque estaban comiendo pizza, como eran hartos, necesitaban dividirlas en partes iguales".
> -"para repartir cosas"
> -"para representar una parte que se divide".

Sólo un estudiante mencionó la fracción como un número que permite cuantificar cantidades continuas (kilógramo), aún cuando no podemos saber si es consciente de ello:

> "-Ah, para comprar queso, un cuarto de queso…-… compra un cuarto de queso porque un kilo es mucho… un cuarto es una parte de un kilo, también se puede pedir por plata (dinero), me da tanto (se refiere a una cierta cantidad) de queso."

Por otra parte, podemos observar que hizo una reflexión en torno a que la utilización de la fracción hoy en día en ese contexto no era necesaria, pues se puede medir la compra por la cantidad de dinero que cuesta el producto (en unidades de medida menores como los gramos).

Dos estudiantes mencionaron que deben haberlas inventado con fines formativos "para aprender", "para que tengamos una mejor vida".

**Aspectos valorados del trabajo escolar con fracciones**

La valoración que hacen los estudiantes del trabajo con fracciones, se evidencia en las siguientes menciones:

> -"a mí me gustó que uno puede hacerlo en diagrama (ver ilustración 9)…(pero no le gusta) que cuando los dos números de abajo son iguales no se ponga el mismo, que no se sumaran"
> -"no me gusta hacer los diagramas, me gusta hacer los números"
> -"a mí me gusta más el diagrama porque es más fácil"
> -"la tía (profesora) nos enseñó bien las fracciones y mi mamá me quería enseñar pero no le entendí nada…a la tía, en la tercera clase le entendí"

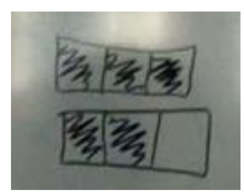


**Ilustración 9**

Es decir, los estudiantes valoran la utilización de los diagramas, por lo llamativo y simple que les resulta la utilización de un registro gráfico; y la forma de enseñar de la profesora, quien les parece que, en contraposición a personas legas, sí sabe explicar.

**Dificultades derivadas del trabajo escolar con fracciones**

En relación con las dificultades experimentadas al trabajar con fracciones, los estudiantes aludieron a dificultades generales relacionadas con el proceso de enseñanza aprendizaje:

-"ha sido complicado aprender fracciones" (varios)

- "a veces cuesta entender, uno está tratando y no entiende…"

-"Al principio nos costó, pero después no tanto"

También se refirieron a aspectos relativos a la gestión de la clase, relevando la importancia que cobran tanto la estrategia didáctica utilizada y como quien enseña:

-"nos dan muy poco tiempo"

-a mí me carga eso…porque yo la estoy haciendo y al tiro (inmediatamente) dicen la respuesta (y no alcanza a encontrarla por sí mismo)

-para sumar fracciones igual costaba…como que la profesora decía muy rápido y cuando le preguntaba decía: "pregúntele al compañero"

-"le da la oportunidad a los más mateos[10] del curso".

-"la tía (profesora) nos enseñó bien las fracciones y mi mamá me quería enseñar pero no le entendí nada…a la tía, en la tercera clase le entendí"

- "me pueden explicar y puedo entender, pero leyendo de un libro no"

- Me ha costado harto aprender de las fracciones …, pero personas que son profesionales (se refiere a la profesora) saben que si les toca a un niño que es difícil tiene que repetirle más de dos veces, tres veces…

Con la experiencia rememorada en relación con el aprendizaje de las fracciones, los estudiantes reflexionaron en torno a cómo se aprende matemáticas y al gusto por las matemáticas:

Entonces, si les repiten ¿entienden?

-"Sí, y también practicando, porque las matemáticas es de puro ejercicio".

-"No,… la base (de las matemáticas) es aprenderse las tablas".

-"Ensayar, ejercitar".

-"cuando uno entiende las matemáticas se hacen más divertidas, cuando uno no entiende está como así choreado (molesto) porque no entiende nada de lo que le explican".

-"Cuando estoy de mal humor no me gusta".

-"No me gusta que me vaya más o menos".

-"Las encuentro divertidas, pero lo que no me gustan son las fracciones, porque es medio complicado, como que uno se enredaba".

-me gustaría que sean menos rápidas las clases

[10] En Chile es usual referirse a los estudiosos como "mateos"

Y respecto de dificultades propias del tema, se refirieron fundamentalmente a la operatoria con las fracciones.

-"Me cuesta la división"
-"Cuando uno ya tiene el resultado listo y tiene que dividir, eso me cuesta" (Rodrigo)
-"me cuesta simplificar o amplificar"
-"me cuesta sacar el mínimo común denominador"
-"me cuesta dividir" (José)
-"es suma y a veces resto…"
- "Se debe buscar el Mínimo común denominador porque cuando se suma se tiene que poner el mismo número que está abajo", "Para restar se hace lo mismo"
-"Para dividir se divide cruzado" . "No, se multiplica cruzado"

**Adición y sustracción de fracciones**

Debido a que el tema central de esta investigación es la operatoria aditiva con fracciones, profundizamos en él formulándoles preguntas específicas sobre la operatoria ¿cómo suman fracciones?, ¿qué es lo más complicado al sumar?, ¿en qué se equivocan?

El error más mencionado se relaciona con el hecho de operar con las fracciones como si fuesen números naturales "sumar numerador con numerador y denominador con denominador, sin convertirlo…"

Respecto de las técnicas utilizadas señalaron:

-"la tía nos enseñó a buscar los múltiplos primero".
-"hay que buscar el mínimo común múltiplo, y de ahí en el número que esté la fracción se multiplica, lo que sale se suma o se resta, pero tiene que quedar igual el denominador"
-"por ejemplo 1/6 más 3/8, hay que ver la tabla de multiplicación, hay que ver el lugar y se pone el número al lado, y te sale tres para llegar a ocho, cinco, y ahí te sale.
-"si los (números) de abajo son diferentes se busca el mínimo común múltiplo".
-"Los de abajo cuando son iguales no se suman, por ejemplo si son dos cincos se pone un cinco"

Podemos observar que la mayoría de los entrevistados han asimilado que deben buscar los múltiplos de los denominadores cuando éstos son diferentes. Cuando se les pregunta, mencionan que eso se hace para que los denominadores sean iguales, pero…no saben por qué tienen que ser iguales, y dan explicaciones referidas al algoritmo aprendido.

¿Para qué buscan los múltiplos?:

-"para ver el lugar"

-"para poder sumar y restar porque se puede sumar y restar cuando tienen igual denominador" .

-a nosotros nos enseñaron así, que abajo siempre tienen que ser iguales

-para sacar el resultado mejor

-porque si fueran diferentes saldría el resultado malo

-no nos dijeron eso

- Se debe buscar el mínimo común denominador porque cuando se suma se tiene que poner el mismo número que está abajo.

-(se busca el mcm) para que los dos números de abajo sean iguales

¿Saben por qué el denominador tiene que quedar igual?

-" No" (todos)

-"No sabemos, aún no nos dicen"

Un estudiante justifica el que no lo sepan aludiendo a su complicación:

-"Es que para ser de sexto así es más fácil, es que la matemática es muy complicada".

Para buscar los múltiplos comunes hacen dos listas en las escriben secuencialmente los múltiplos de cada denominador y encierran el primero que se repite. Luego cuentan el lugar en que se ubica el múltiplo común en cada lista y lo anotan sobre la fracción respectiva. No hay conciencia de que dicho número es el factor que multiplicado por el denominador original produce el múltiplo común.

El paso siguiente es amplificar cada fracción, pero aquí comienzan a surgir las diferencias.

Por ejemplo, cuando un estudiante señala "1/6 más 3/8, hay que ver la tabla de multiplicación, hay que ver el lugar y se pone el número al lado…", (ilustración 10) está buscando el múltiplo común de los denominadores, pero luego agrega "…y te sale tres para llegar a ocho, cinco…" , cuando debía amplificar mediante la multiplicación, está calculando la diferencia entre el tres y el ocho.

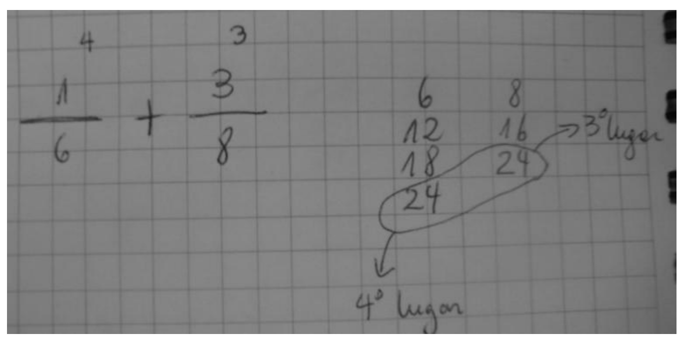



**Ilustración 10**

Otra estudiante, por otra parte, describe el mismo procedimiento inicial al calcular la resta 3/2 - 3/4: "Tengo que buscar los múltiplos de los números de acá abajo (denominadores 2 y 4)". Los escribe secuencialmente:

**Ilustración 11**

"se tiene que repetir el menor número, lo encerramos y vemos en qué lugar queda, este queda en el 1°, y amplificamos, este otro queda en el 2°, y amplificamos", y anota los números 1 y 2 sobre las fracciones . A continuación señala "después aquí, tengo que restar, uno menos cuatro son tres, (y anota el tres en el numerador de la fracción "amplificada"), uno menos 3 son dos (lo anota en el denominador), aquí sería dos menos dos son cero, (lo anota en el numerador) y aquí dos menos tres son una (lo anota en el denominador). Es decir, en vez de multiplicar para amplificar las fracciones y expresarlas como otras equivalentes para igualar denominadores, resta el número auxiliar(factor de amplificación) con el numerador y lo anota en el denominador, de la misma manera resta el número auxiliar con el denominador y lo anota en el numerador. Justifica dicho procedimiento diciendo que "como en este caso es resta se hace con resta".

### *4.1.2.1 Síntesis del análisis cognitivo*

En síntesis, los estudiantes conciben mayoritariamente a la fracción como un objeto matemático que se forma al dividir un entero en partes iguales, y considerar algunas de aquellas partes. No tienen conciencia de la funcionalidad de la fracción como aquel número que nos permite cuantificar una cantidad no entera, por lo tanto les resulta muy difícil justificar su existencia. Es decir, la fracción no viene a resolver ningún problema para los estudiantes, sólo las han utilizado en un contexto escolar cuando se les pide representar una parte de esa división. No hay un sentido para ello, más allá de respetar el contrato didáctico que señala que parte de la responsabilidad del estudiante es realizar las actividades que indica el profesor. En el contexto no escolar, señalan que las han utilizado cuando quieren comprar una cantidad no entera de una magnitud continua ("un cuarto de kilógramo de queso", "porque un kilo es mucho"), pero no las sienten necesarias dado que es factible comprar utilizando como unidad de medida los gramos o la cantidad de dinero que se quiere gastar en ella.

Por otra parte, fue posible apreciar que la representación visual de las fracciones tiene un gran peso en la conceptualización, pues todos sin excepción, recurren al diagrama como elemento de validación de la definición de la fracción como uno o varios trozos de un entero mayor.

Mayoritariamente, lo que valoran en relación con el trabajo con fracciones, es la utilización de un registro gráfico (diagramas), y la disposición y capacidad de la profesora para explicar más de una vez.

Dentro de las dificultades que reconocen señalan que encuentran complejos los procedimientos para operar con ellas: calcular el mínimo común múltiplo, amplificar, simplificar, dividir, etc. En ello incide también la gestión de la clase –aunque no es un tema exclusivo del trabajo con fracciones- señalaron que necesitan tiempo para trabajar pues sienten que las clases son muy rápidas, que no se respetan sus ritmos y la actividad se vuelve poco desafiante cuando otro niño o niña que resuelve primero la operación da el resultado.

Respecto de la adición y sustracción de fracciones expresan los pasos del algoritmo, o bien partes de él, cuyo fundamento es el propio algoritmo. Muchos señalan que se tienen que igualar los denominadores, ya que no se pueden sumar si los denominadores son distintos, pero no saben por qué. No han asimilado un argumento matemático que justifique el procedimiento. Si bien describen los pasos, ninguno menciona que se busca el mínimo común múltiplo, y luego el factor que permite amplificar la fracción, para obtener fracciones equivalentes, con el mismo referente o medida.

En sus descripciones del procedimiento notamos que la mayoría mira la fracción como dos números separados por una línea. Ello se hace más evidente cuando una estudiante explica con mucha convicción una serie de pasos para efectuar la resta de fracciones. Lo que ella retuvo es que se anotan ordenadamente los múltiplos de cada número de abajo, se selecciona el menor que es igual y se escribe el lugar que ocupa cada múltiplo sobre las fracciones respectivas. A partir de allí opera ese número auxiliar con los numeradores y denominadores realizando una "amplificación" *sui generis* descrita con detalle en el apartado anterior. Lo curioso es que hay una estructura visual que coincide con la secuencia de los pasos del algoritmo tradicional. Pero como dichos pasos carecen de fundamento o sentido, no hay consciencia de lo que se hace, ni de por qué se hace. Entonces, no es extraño que para *amplificar* se opere el número auxiliar restándolo o sumándolo con numeradores y denominadores y se anote en el lugar alterno.

Es decir, la mayoría de los estudiantes no tienen claro el concepto de fracción, y han adquirido un conocimiento procedimental para trabajar con las fracciones, sin saber explicar sus fundamentos matemáticos. Este desconocimiento de de la base matemática sobre la que se sostiene el algoritmo, implica que el conocimiento adquirido por los estudiantes es débil, no les resulta útil, porque no hay un sentido que sustente cada paso a realizar. Es interesante observar en este caso cómo la profundización en los fundamentos es la que permite brindar sentido al procedimiento, contradiciendo el pensamiento de sentido común que señala que la simplificación de los procedimientos podría facilitar el aprendizaje.

### 4.1.3 Análisis didáctico: Cómo se enseña la operatoria con fracciones

#### *4.1.3.1 Análisis del texto oficial*

Se analizó el texto "Matemática 5°", de Marín, F. y Castillo M, editado por Santillana del Pacífico S.A. Ediciones en el año 2009. Dicho texto ha sido repartido gratuitamente los años 2009 y 2010 por el Ministerio de Educación, como material de apoyo para los estudiantes de los colegios municipales y subvencionados del país.

El análisis se realizó utilizando las nociones de tarea y técnica del modelo praxeológico propuesto de Yves Chevallard, y la noción de variable didáctica de Guy Brousseau.

Utilizamos la noción de variable didáctica en un sentido amplio y en uno restringido. El primero se refiere a aquellas variables de gestión de clases (variables de comando) que pueden ser controladas por el o la docente para hacer evolucionar los comportamientos de los estudiantes. La única variable de este tipo que fue posible apreciar a través de este análisis de texto, fue la construcción de las estrategias y de las técnicas. El segundo, las entiende como aquellas condiciones o parámetros que el o la docente puede controlar para provocar la evolución de las técnicas.

Las variables didácticas consideradas en este análisis fueron:

> Significado de la fracción: utilizaremos como referente los cinco significados propuestos por Kieren, ya descritos en el análisis epistemológico. Como parte-todo o partes de una unidad, como división o cociente, como resultado de una medida, como operador y como razón.
>
> Relación entre los denominadores: Los denominadores pueden ser iguales o distintos. Si son distintos pueden ser primos entre sí, uno múltiplo del otro, o tener un factor en común.
>
> Tipo de fracción: propia o impropia
>
> Uso de registro gráfico: de utilizarse se especifican las características de la gráfica
>
> Construcción de la estrategia y las técnicas: Pueden emerger del trabajo individual o colectivo de los estudiantes, o ser entregada de antemano por el texto.

## Desarrollo

La guía didáctica del profesor, trae una propuesta de planificación de la unidad consistente en una tabla de doble entrada en la que se relacionan los contenidos mínimos con los aprendizajes esperados, los recursos didácticos y los tipos de evaluación. No se refiere a la gestión de las actividades propuestas para el desarrollo de las clases.

Los aprendizajes esperados que declara la planificación para la unidad referida a las fracciones son:

- Efectuar adiciones y sustracciones de fracciones positivas, a través de la amplificación o simplificación de fracciones.
- Resolver situaciones problemáticas en diferentes contextos
- Aplicar las habilidades básicas del proceso de resolución de problemas en diversos contextos, haciendo uso de las operaciones de adición y sustracción de fracciones positivas

Dentro de la unidad, el tema referido a la adición y sustracción de fracciones, lo presenta en tres apartados "Adición y sustracción de fracciones con igual denominador"; "Adición y sustracción de fracciones con distinto denominador"; y "Buscando estrategias", una sección fija al final de cada unidad temática en la que se indica una estrategia para resolver problemas.

**Primer apartado**

**Adición y sustracción de fracciones con igual denominador**

Presenta un problema en el que señala que en un mismo horario de clases, 4/15 del curso se inscribió en el taller científico, 7/15, en el taller de pintura, y el resto en ningún taller. Se pide que observen un diagrama rectangular con 15 cuadritos iguales que tienen pintados 4 cuadritos de un color, 7 de otro, y el resto sin pintar.

Realiza preguntas respecto de qué representa cada color en la gráfica, qué fracción del curso participa en talleres, y qué fracción no participa. A continuación pide que evalúen si es correcto decir que si el curso tiene 45 estudiantes, 9 no se inscribieron en talleres y 21, en el taller científico.

No da la oportunidad de que los estudiantes desarrollen el problema sino que indica que para poder obtener la fracción del curso que participa en talleres se pueden sumar las fracciones que representan a los inscritos en cada taller y muestra cómo se realiza la suma de fracciones de igual denominador (sumando los numeradores y conservando el denominador)

Asimismo, para calcular la parte que no se inscribió en ningún taller considera que el total del curso se puede representar por 15/15 y procede a restarle la suma anterior del mismo modo (restando los numeradores y conservando el denominador)

En seguida formaliza los procedimientos para sumar y restar fracciones con el mismo denominador y pide que resuelvan una guía de ejercicios con cinco tareas.

Es decir, no propicia que los estudiantes construyan el conocimiento a aprender. Indica la técnica a utilizar utilizando como apoyo el registro gráfico mediante diagramas basados en el significado parte-todo. Y luego pide que resuelvan, aplicando la técnica indicada, las siguientes tipos de tareas:

1.- Identificar fracciones a partir de información extraída de una representación gráfica.

2.- Calcular adiciones y sustracciones de fracciones de igual denominador.

3.- Descubrir la fracción incógnita en una adición o en una sustracción.

4.-Calcular el resultado de ejercicios combinados (adiciones y sustracciones)

5.- Resolver problemas que involucran adición y sustracción de fracciones

Variables didácticas implicadas en las tareas:

El estudio de la adición y sustracción de fracciones es fragmentado en función de las técnicas de cálculo, razón por la cual en este primer apartado la *relación entre los denominadores* es de igualdad. Tanto los problemas como los ejercicios de cálculo plantean sólo un *tipo de fracción*, las propias, dejando fuera el trabajo con fracciones mayores que un entero. Asimismo, en la única tarea en la que se trabaja con un registro visual, el *tipo de gráfico* que se utiliza es un diagrama cuadriculado (ilustración 12) que representa un entero fragmentado en partes iguales. Como podrá observarse en el párrafo siguiente, estas dos últimas ideas son concordantes con el significado de referencia.

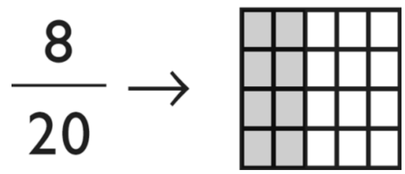



**Ilustración 12**

El único significado presente es el de *parte-todo*. En la primera tarea se utiliza un registro gráfico a través de un diagrama cuadriculado en el que cada sector pintado representa una parte de un todo. En los problemas de la quinta tarea, en el primer caso, el todo es un huerto dividido en 8 partes iguales, que tiene una parte sembrada con acelgas, otra con tomates, y otra sin sembrar. En el segundo, el todo es una bandeja con 20 pasteles, de la cual se comieron dos partes de 9/20 y 8/20, respectivamente. En las tareas de cálculo no es factible identificar un significado para las fracciones.

De las cinco tareas planteadas, en la única en la que los y las estudiantes deben necesariamente *construir una estrategia* es en la tercera, cuando deben determinar la operación que permite calcular el término desconocido. Los ejercicios de cálculo no requieren elaborar estrategias, la primera tarea indica la estrategia con un ejemplo, y para los problemas de la quinta tarea, se puede aplicar la misma estrategia de dicho ejemplo.

En relación con la *construcción de las técnicas*, éstas se indican al inicio del apartado:

- *Para resolver una adición de dos o más fracciones con igual denominador se suman los numeradores y se conserva el denominador*
- *Para resolver una sustracción de dos fracciones con igual denominador se restan los numeradores y se conserva el denominador.*

Asímismo, en las operaciones combinadas de la cuarta tarea, se señala expresamente que se deben desarrollar primero las operaciones entre paréntesis y luego las adiciones y sustracciones de izquierda a derecha.

**Segundo apartado**

**Adición y sustracción de fracciones con distinto denominador**

Presenta un problema en el que señala que en su cumpleaños, Camila se comió 2/5 de una torta con su familia y 13/30 con sus amigos. No presenta diagrama.

A continuación, se formulan las siguientes preguntas:

-Si la torta estaba dividida en 30 porciones iguales ¿Cómo representarías en un diagrama cuánta torta se comieron en total?

-¿Cuánto es $\frac{2}{5}+\frac{13}{30}$? ¿Cómo lo supiste?

-¿Cuál es la fracción de la torta que representa lo que queda después de que Camila, sus amigos, amigas y familiares comieron torta? ¿cómo obtuviste el resultado?

-¿Cómo resolverías $\frac{30}{30}-\left(\frac{2}{5}+\frac{13}{30}\right)$? ¿A qué corresponde el resultado de este ejercicio en el contexto del problema?

En seguida formaliza los procedimientos para sumar y restar fracciones con distinto denominador:

-Amplificar o simplificar todas o algunas de las fracciones dadas para obtener fracciones con denominadores iguales.
-Sumar o restar los numeradores según corresponda y conservar el denominador.
-Simplificar para expresar el resultado como fracción irreductible

Es decir, inicialmente se pide que construyan un diagrama, y se espera que mediante la observación del mismo, los estudiantes concluyan que se pueden sumar y restar fracciones de distinto denominador expresándolas como fracciones equivalentes con igual denominador. No les da indicaciones acerca de la estrategia a utilizar, pero pone a su disposición el diagrama como una herramienta didáctica de apoyo.

Los estudiantes no saben resolver este problema, pues implica sumar fracciones con distinto denominador, por lo tanto, esta actividad puede constituirse en un problema real para ellos, en un desafío. Sin embargo, esto dependerá en gran medida de la gestión que haga el profesor de la actividad, puesto que en el renglón siguiente a las preguntas están descritos las técnicas para sumar y restar fracciones, de manera que eventualmente el estudiantes podría no construir la técnica y utilizar dicha información para resolver el problema.

Las preguntas sucesivas son muy similares a las planteadas en el apartado anterior, y se pueden resolver aplicando las mismas estrategias, por lo tanto no constituyen un desafío.

Por último, pide que resuelvan una guía de ejercicios con las siguientes tareas:

1.- Calcular adiciones y sustracciones de fracciones con distinto denominador.

2.- Resolver problemas que involucran adición y sustracción de fracciones con distinto denominador

Variables didácticas implicadas en las tareas:

Este apartado aborda el estudio de adición y sustracción de fracciones cuyos denominadores son distintos entre sí. Se distinguen los siguientes tipos de *relación entre los denominadores*: con un factor en común, uno múltiplo del otro, y primos entre sí. En relación con el *tipo de fracción,* observamos que ejercicios de cálculo y problemas plantean mayoritariamente fracciones propias, y una fracción igual a la unidad, nuevamente no se trabaja con fracciones mayores que un entero. No hay apoyo de registro gráfico, sino únicamente el numérico. Los dos problemas planteados utilizan respectivamente las fracciones como *medida* de tiempo (1/4 de hora, 5/8 de hora) y como *parte de un todo* cuyo referente entero es una plantación, y cuyas partes son 1/5 y 1/2 de la plantación.

De las dos tareas planteadas, cálculo de adiciones y sustracciones, y resolución de problemas, en la segunda los y las estudiantes deben necesariamente *construir una estrategia* para determinar la operación que permite resolver el problema. Los ejercicios de cálculo no requieren elaborar estrategias de resolución.

En relación con la *construcción de las técnicas*, éstas se indican al inicio del apartado:

*Para sumar o restar fracciones con distinto denominador puedes:*

- *Amplificar o simplificar todas o algunas de las fracciones dadas para obtener fracciones con denominadores iguales.*
- *Sumar o restar los numeradores según corresponda y conservar el denominador.*
- *Simplificar para expresar el resultado como fracción irreductible*

Además, en el enunciado que presenta la primera tarea, se señala expresamente que resuelva los ejercicios amplificando o simplificando para igualar los denominadores.

**Tercer apartado**

**Buscando estrategias**

Se presenta el siguiente enunciado:

En la sala del 5°B hay un diario mural. En el curso acordaron que la información que pondrían en él se distribuirá de la siguiente manera:

$\frac{2}{9}$ para informaciones del curso; $\frac{1}{3}$ para noticias nacionales e internacionales; $\frac{2}{9}$ para informaciones del colegio

El resto para la exposición de trabajos de los alumnos y alumnas del curso.

A continuación se pregunta ¿Qué fracción del diario mural está destinada a la exposición de trabajos de los alumnos y alumnas?

En seguida, se indican cinco pasos para resolver un problema: comprender, planificar, resolver, responder, revisar, y se aplican para resolver la situación planteada inicialmente.

Es decir, se indica una técnica para resolver problemas, que consiste en realizar una serie de pasos sucesivos. Se ejemplifica su uso en una situación concreta.

Luego, pide que resuelvan una guía de ejercicios con las siguientes tareas:

1.- Resolver problemas aplicando la estrategia indicada.

2.- Resolver nuevamente un problema del bloque anterior utilizando otra estrategia y compararla con la de algún compañero o compañera.

3.- Resolver problemas utilizando la estrategia deseada por el estudiante. Comparar el procedimiento utilizado con un compañero o compañera y evaluar cuál es más simple

Es posible observar que la resolución de problemas de planteo se trabaja separadamente de las técnicas de cálculo. Ello tiene relación con la concepción del rol didáctico de los problemas. El análisis de los apartados anteriores da cuenta, que en este texto las situaciones problemáticas se ven como la posibilidad de poner en práctica las técnicas de cálculo. A ello se debe que las tareas propuestas en cada apartado enfaticen el trabajo de las técnicas de cálculo y sólo la tarea final de cada uno plantee la resolución de problemas. Lo mismo ocurre si analizamos la secuencia de los apartados: el primero aborda la suma de fracciones de igual denominador, el segundo la suma de fracciones con distinto denominador, y el tercero y último, la búsqueda de estrategias de resolución de problemas.

Variables didácticas implicadas en las tareas:

La tarea central de este apartado es la resolución de problemas con distintas condiciones referidas a la estrategia a utilizar para resolverlos: utilizando la estrategia proporcionada por el texto, utilizando una distinta a la dada, o utilizando cualquier estrategia a discreción del estudiante.

Acerca de las cantidades fraccionarias presentes en los problemas:

En tres de estas situaciones las fracciones representan una parte de un todo, en los cuatro restantes, representan una medida. A diferencia de los anteriores apartados en los que mayoritariamente se trabajaba con el significado parte-todo (salvo en un problema del segundo apartado), en este la mayoría de los problemas presentan la fracción como una medida. No hay apoyo de registro gráfico.

Cinco de los problemas utilizan sólo fracciones menores que un entero, y los dos restantes utilizan fracciones *propias e impropias.* Mayoritariamente, la *relación entre los denominadores* implica que *uno es múltiplo del otro*, salvo en un problema en el que se plantean también fracciones *con un factor común.*

En relación con la *construcción de estrategias*, el primer ítem no permite que los estudiantes construyan una estrategia para resolver el problema, ya que indica expresamente que utilicen la que proporciona el texto. En el segundo ítem, en cambio, son los estudiantes quienes deben construir una estrategia distinta. Y en el tercero, pueden decidir si utilizan una propia o la dada. El texto no aborda la problemática de construir una estrategia específica que permita determinar la operación que permite resolver el problema.

En dos problemas de este apartado se introducen fracciones impropias, de manera que podría instalarse allí una problematización respecto de qué representa esa fracción, que permitiera llegar a concluir que es mayor que un entero. Entonces podría surgir la necesidad de *construir una técnica* que permitiese expresar aquellas fracciones mayores que un entero como una cantidad que contuviese una parte entera y una parte fraccionaria. Sin embargo se impide que el estudiante viva esa problematización, ya que se indica expresamente en un recuadro al lado de dichos problemas, la técnica a utilizar para escribir una fracción como número mixto.

*Una fracción impropia se puede escribir como número mixto:* $\frac{19}{5} = \frac{15}{5} + \frac{4}{5} = 3\frac{4}{5}$

#### *4.1.3.2 Síntesis del análisis de texto*

A través de este análisis ha sido posible apreciar que en este texto, el estudio de la adición y sustracción de fracciones es fragmentado en función de las técnicas de cálculo, y que a su vez, las técnicas de cálculo son escindidas de las problemáticas que le dieron origen.

Ello se evidencia en la estructura en la que se aborda el tema. El primer apartado se refiere a la adición y sustracción de fracciones de igual denominador y en él se entregan las técnicas para sumar y restar fracciones con dichas condiciones. El segundo apartado trata la adición y sustracción de fracciones con distinto denominador, entrega la técnica de amplificar o simplificar para obtener fracciones con un mismo denominador, y luego aplicar la técnica de sumar o restar los numeradores y conservar los denominadores. En ambos apartados, luego de explicar las técnicas, se proponen tareas de cálculo y dos problemas de aplicación. El tercer apartado, denominado "Buscando estrategias" entrega una estrategia para resolver problemas en los que se espera se apliquen las técnicas aprendidas en los apartados anteriores.

Es importante reflexionar acerca del rol que juegan los problemas en la enseñanza. Las matemáticas han surgido como respuesta a determinadas situaciones problemáticas, es decir, a través de la historia de los pueblos, los problemas se han constituido en un medio de construcción de conocimiento. Asimismo, en la construcción social del conocimiento matemático, hay una relación intrínseca entre las técnicas de cálculo y las situaciones problemáticas que propiciaron la emergencia de dichas técnicas.

Paradojalmente, en las situaciones escolares, los problemas suelen no ser utilizados como medio para el aprendizaje, puesto que son presentados al final del camino, cuando las técnicas que permiten resolverlos han sido construidas. Se produce así una clara escisión entre las técnicas de cálculo y la resolución de problemas, que favorece una pérdida de sentido de ambos objetos matemáticos: los problemas no son situaciones que desafían a los estudiantes, instándolos a crear ciertos conocimientos (por ejemplo las técnicas de cálculo) para resolverlos; sino ejercicios para practicar el uso de las técnicas de cálculo, que son el objeto que realmente se valora dentro de esta mirada. De este modo las técnicas se constituyen en una serie de pasos a seguir por imitación, y los problemas en meros ejercicios de aplicación de dichas técnicas.

Bajo otra concepción, los problemas son vistos como la posibilidad de poner a las y los estudiantes frente a un real desafío que no saben resolver inmediatamente. De manera que la situación los obliga a poner en juego lo que saben. Ponen a funcionar el saber, para construir así un nuevo conocimiento matemático que a su vez funcione para dar solución al desafío. (Brousseau, 1986)

Gálvez (1994), describe muy bien el rol que pueden jugar los problemas en una situación de enseñanza desde la perspectiva de Brousseau

*En síntesis, se trata de enfrentar a los alumnos a una situación que evolucione de tal manera que el conocimiento que se quiere que aprendan sea el único medio eficaz para controlar dicha situación. La situación proporciona la significación del conocimiento para el alumno, en la medida en que lo convierte en un instrumento de control de los resultados de su actividad. El alumno construye, así un conocimiento contextualizado, a diferencia de la secuenciación escolar habitual, donde la búsqueda de aplicaciones de los conocimientos sucede a su presentación, descontextualizada.*

En relación con las variables didácticas podemos concluir lo siguiente:

El significado de referencia mayoritario es el de parte-todo, y en segundo lugar el significado de la fracción como medida. No se abordan otros significados para las fracciones. Se utiliza el registro gráfico sólo en el primer apartado, precisamente para visualizar la relación parte-todo. Por otra parte, observamos que se utilizan fundamentalmente fracciones propias, sólo en los dos últimos problemas del tercer apartado se introducen fracciones mayores que un entero.

Ambas variables no contribuyen a conceptualizar la fracción como un número que permite expresar cantidades no enteras. El significado parte-todo permite que se disocie la fracción, asociando el numerador con la cantidad de partes consideradas, y el denominador con el total de partes en que se ha dividido el todo-entero. Por otra parte, dificulta la conceptualización de fracciones mayores que un entero, pues en esos caso ¿puede ser el todo mayor que el entero? La utilización casi exclusiva de fracciones propias refuerza esa noción de fracción.

Las mayoría de los denominadores de las fracciones presentadas en los apartados son uno múltiplo de otro, solo dos ejercicios plantean fracciones cuyos denominadores tienen un factor en común, y un caso exclusivo en el que los denominadores son primos entre sí. No consideran los distintos grados de complejidad que cobran las técnicas de cálculo dadas estas diferencias de relaciones entre los denominadores.

Observemos:

Cuando los denominadores son uno múltiplo del otro, es necesario amplificar sólo una fracción para expresarla en términos de la otra; si tienen un factor en común, es necesario amplificar ambas fracciones para expresarlas en términos de un denominador común; cuando son primos entre sí, es necesario amplificar ambas fracciones utilizando como factor de amplificación el denominador de la otra fracción. En el segundo caso, también es posible buscar un múltiplo común con el método de amplificar cada fracción por el denominador de la otra fracción, pero además, es posible amplificar por un factor más pequeño: por el denominador de la otra fracción dividido por el factor común. De esta manera es posible obtener el mínimo común múltiplo que corresponderá exactamente al producto entre los denominadores dividido por el factor común. Resulta interesante reflexionar acerca de la pertinencia de plantear como requerimiento obligado para sumar y restar fracciones la búsqueda del mínimo común denominador, en circunstancias que con buscar un múltiplo común ya basta para expresarlas con un referente común y poder operarlas.

Por lo tanto, como el objetivo de la secuencia contenida en esta investigación es que los estudiantes construyan el algoritmo para sumar o restar fracciones. Esta variable podría utilizarse para controlar la graduación de menor a mayor grado de dificultad en la construcción de dicho algoritmo, presentando las fracciones en el siguiente orden: denominadores uno múltiplo del otro, primos entre sí, con un factor en común.

Ahora, específicamente en relación con la construcción de las técnicas y estrategias de resolución, se observó que tanto las técnicas para operar aditivamente con fracciones como la estrategia de resolución de problemas, se entregan al inicio de cada apartado. No obstante aquello, al presentar las tareas a desarrollar se indica la técnica que debe ser utilizada, restringiendo la posibilidad de construcción de conocimiento matemático por parte del estudiante:

> *"…calcula la fracción pintada en la figura utilizando una adición, y la fracción sin pintar con una sustracción."*
> *"Resuelve los siguientes ejercicios amplificando o simplificando para igualar denominadores…"*
> *"Resuelve los siguientes problemas aplicando la estrategia de la página anterior"*

Cada vez que el estudiante se enfrentó a una tarea o a una parte de ella que no sabía resolver, se le proporcionó ayuda indicando la técnica con la que se resuelve o bien mediante un recuadro. Así ocurre con la información referida a la prioridad en el orden de resolución de las operaciones y con la expresión de fracciones mayores que un entero como número mixto. Las excepciones fueron cómo calcular el término desconocido de una suma o de una resta, tarea que se resolvía utilizando la relación inversa entre la adición y la sustracción, cómo determinar la operación que resuelve un problema en los diversos apartados y el segundo ítem del tercer apartado en el que se solicitaba expresamente utilizar una estrategia distinta a la presentada en el texto.

Esta modalidad de trabajo de las técnicas como si fuesen recetas a aplicar, se relaciona íntegramente con lo planteado unos párrafos atrás respecto del rol de los problemas y de las técnicas en la enseñanza. No se contempla la construcción de las técnicas porque no se valora el significado y la funcionalidad de los conocimientos.

Nuevamente , Gálvez (1994) explica muy claramente la concepción que subyace a esta forma de organizar el trabajo escolar:

> *La forma como los sistemas educativos organizan la enseñanza de los temas incluidos en los programas escolares implica una determinada concepción de los procesos de adquisición de los conocimientos. Hasta la fecha ha predominado una concepción según la cual basta con descomponer un saber, en su modalidad cultural, en pequeños trocitos aislados, y luego organizar su ingestión por los alumnos, en periodos breves y bien delimitados, según secuencia determinadas sobre la base del análisis del propio saber. Esta manera de organizar la enseñanza no atribuye importancia al contexto específico (situación) donde los conocimientos*

*son adquiridos, ni a su significación y valor funcional, durante su adquisición. (pp. 45-46)*

#### *4.1.3.3 Concepciones de los profesores*

Este apartado se construyó mediante el análisis de la información recogida a través de entrevistas realizadas a 3 profesoras que imparten o han impartido matemáticas en quinto o sexto de educación básica en escuelas pertenecientes a la corporación municipal de La Florida (Comudef). Las entrevistas fueron realizadas individualmente por la investigadora en el lugar de trabajo de las docentes y tuvieron una duración aproximada de 30 minutos cada una. El registro se hizo mediante videograbación. Para conservar el anonimato de las profesoras y facilitar la lectura del análisis utilizaremos nombres de fantasía.

Se utilizó la metodología de entrevista semi-estructurada que contempla la realización de preguntas definidas previamente y de otras preguntas surgidas espontáneamente en el marco de la conversación. Dicha elección tenía como objetivo poder recabar la mayor cantidad de información posible respecto de la enseñanza de la adición de fracciones.

Las preguntas guía de la entrevista fueron:

- ¿Qué diría que deben comprender los estudiantes o deben ser capaces de realizar antes de que puedan comenzar a aprender a sumar o a restar fracciones?
- ¿Cómo piensa usted que debe enseñarse la suma de fracciones?
- ¿Cuáles son los errores más frecuentes que cometen los niños al sumar o restar fracciones? ¿Qué se puede hacer para tratar de subsanar ese error?
- ¿Qué le diría a un estudiante si le preguntara por qué para sumar o restar fracciones hay que igualar los denominadores?
- ¿Usted se imagina alguna situación en la que se usen las fracciones y que no sea una situación de reparto?
- ¿Le gusta enseñar fracciones? ¿Cómo usted enseña la suma de fracciones?

**Resultados de las entrevistas**

**Antes de aprender a sumar fracciones: el concepto de fracción**

Sonia señala que deben saber qué es una fracción, que deben conocer las fracciones propias, las impropias y los números mixtos; deben saber sumar y restar con los números naturales y conocer los conceptos de múltiplos y divisores. Karina, indica que deben saber la operatoria con los números naturales, les leyes de los signos, y que una fracción es una parte de un entero. Fernanda menciona que es importante que conozcan el concepto de fracción, que sepan ordenar y comparar fracciones, y que conozcan las fracciones equivalentes.

Las tres profesoras entrevistadas coinciden en que los estudiantes deben comprender qué es una fracción, y para ello se apoyan en su representación gráfica.

> -"Les digo que fracciones es dividir, es una división, es repartir, para mí eso es fundamental que el niño comprenda eso, que es parte de un todo y que se toman pedacitos", "Y que el denominador es el que nos indica en cuantas partes dividimos el entero, y el numerador, qué partes ocupamos de ese entero. Pero todo se los grafico" (Sonia).
>
> -"Generalmente lo hago con material concreto. Siempre parto la primera clase de la siguiente manera, tengo una hoja marcada en cuatro y me pongo a partirla, entonces les pregunto ¿qué estoy haciendo?-está partiendo una hoja. ¿Cómo estaba esta hoja antes de que yo la partiera?-entera. Entonces solos se van dando cuenta de que cada pedazo es una fracción de la hoja y que una fracción es una parte del entero."( Fernanda)
>
> "la representación (*gráfica*) de fracciones como parte de un entero, hacerlo circular, cuadrado, rectángulo, como sea, y también con diferente material concreto porque después se empieza a elevar los procedimientos" (Karina)

Dentro de los otros requisitos relativos a las fracciones, Sonia plantea también que los estudiantes deben distinguir las fracciones propias de las impropias: "cuando les hablo de fracción les hago la diferencia entre fracción propia y fracción impropia" . Y por otra parte señala que deben conocer la existencia de los números mixtos: "También tienen que saber que esas fracciones se pueden juntar y podemos tener mucho más que una fracción, enteros, podemos tener números mixtos.

Fernanda plantea que además de conocer el concepto, es muy importante saber ordenar y comparar fracciones "después (del concepto) viene orden, después viene la comparación y las fracciones equivalentes, y después viene la operatoria".

En cambio, las otras dos profesoras le dan importancia a la operatoria con los números naturales y el conocimiento en relación con múltiplos y divisores:

> "Saber sumar y restar números naturales, saber agrupar, saber quitar, eso es como la base", "tienen que saberse los múltiplos, (…) no se pueden pasar fracciones, sin saberse los múltiplos y los divisores antes (Sonia).
>
> "Todas las operaciones (*con los números naturales)* como las deben hacer" "…y multiplicar y dividir con los naturales." (Karina)

Como puede observarse, el concepto de fracción que mencionan las profesoras se relaciona exclusivamente con el significado parte- todo. Las tres ejemplifican con diagramas o con material concreto. Para Sonia, una fracción es una división de un todo en partes iguales del que se toman pedacitos, para Karina, es una parte de un entero que puede tener distintas formas, y para Fernanda es un pedazo de un todo, una parte del entero.

Sólo Fernanda menciona -sin ser consciente de ello- una situación que aborda la fracción desde otro significado cuando plantea que ha obtenido los mejores resultados al trabajar con la recta numérica:

> “trabajando en la recta numérica, ahí les cuesta muchísimo menos, no es mucho menos sino muchísimo menos. Visualmente lo entienden inmediatamente, más que con el dibujito, con el diagrama. Por qué, porque logran ver que todos los enteros son iguales, hay una distancia igual entre un número y el otro”. (Fernanda)

**Enseñando a sumar fracciones**

Sonia les enseña apoyándose en la representación gráfica, es decir, trabaja paralelamente en forma gráfica y numérica.

> “Primero yo les enseño (suma con) dibujos, gráficos, diagramas, porque ahí va quedándoles más claro, y abajo vamos poniendo la fracción. O también les pongo las fracciones y ellos hacen los diagramas. Pero yo voy así, paso por paso.” (Sonia)

Cuando aborda las problemática de sumar fracciones con distinto denominador, problematiza la situación, hasta lograr concluir junto a los niños que es mejor transformar las fracciones de manera que queden con el mismo denominador:

> “1°: poner dos fracciones, el otro día lo hice, con distinto denominador. Las dibujamos, las pintaron, y después vimos si era fácil desarrollarlos al juntar. Cómo eran los tamaños de una... los pedacitos de una fracción cuando son repartidos en más partes el mismo entero y como es la otra repartida en menos partes. Entonces yo les decía, ¿es fácil sumarlos, es fácil quitarlos? Entonces ahí llegamos a la conclusión que es mejor transformarlos en igual denominador” (Sonia)

Entonces surge la necesidad de que niños y niñas conozcan los múltiplos y divisores de un número:

> “…cuando tengo que ver la parte de los distintos denominadores, hay que ver la parte de los múltiplos, y saber si el niño conoce cuáles son los múltiplos, porque hay que buscar el mínimo común múltiplo, para dejarlas igual” “no se pueden pasar fracciones, sin saberse los múltiplos y los divisores antes” (Sonia)

Para buscar los múltiplos comunes entre dos números utiliza dos técnicas según el nivel en el que esté trabajando (5° o 6° básico): escribir los múltiplos de cada denominador horizontalmente y luego seleccionar el primer múltiplo común, o bien, utilizar la tabla de factorización prima.

> “Se los enseño primero horizontal buscando los múltiplos, porque esos los conocen, no?, las tablas de multiplicar…y después por factorización por números primos, y para eso tienen que conocer cuando un número es primo y cuando es compuesto, porque si no, no van a poder buscar el mcm.”(Sonia)

Fernanda señala que también aborda la suma de fracciones con igual denominador en forma gráfica utilizando material concreto. Sin embargo, cuando tiene que sumar fracciones con distinto denominador, señala que le resulta más complejo apoyarse en el material concreto, y lo aborda en forma numérica. El recurso de apoyo que le ha resultado más efectivo en este caso es la recta numérica.

“Primero la suma y resta de fracciones de igual denominador, y después de distinto denominador, trabajamos harto con la de igual denominador primero. Y se trabaja también con material concreto en la suma de fracciones de igual denominador.” “igual es difícil trabajar en concreto con eso, es complicado trabajar con material concreto cuando son de distinto denominador” (Fernanda)

“he usado la recta numérica para hacer sumas (*con igual y con distinto denominador*), y me ha ido bien. Les cuesta menos, por qué, porque (…) están viendo que ellos van a sumar este pedazo, más este otro pedazo”(Fernanda)

“No es una cuestión que lo están haciendo en forma mecánica sino que lo están viendo no más (…) En la recta, es la mejor manera en que yo he podido probar trabajar lo que es fracciones.”(Fernanda)

Karina se apoya mucho en el concepto de fracción a través de su representación gráfica, y luego enseña las técnicas para sumar tal como a ella recuerda que se lo enseñaron: tiene claro que si son fracciones de distinto denominador debe buscar un múltiplo común y para ello utiliza una tabla de factorización prima, luego anota el múltiplo común en el denominador, y multiplica cruzado (el denominador original de una fracción con el numerador de la otra) para determinar cada uno de los nuevos numeradores y los suma.

“ (Lo primero … es ) identificar el tipo de fracción en cuanto a numerador y denominador, y ver si son de igual denominador o distinto denominador, y luego de eso enseñarles las técnicas que existen para poder llegar a sacar el resultado de esa suma de fracciones (Karina)

“Como yo aprendí, no me acuerdo mucho, a ver, por ejemplo $\frac{1}{4}+\frac{2}{6}$ : me fijo en el denominador, el 4 y el 6. Como es distinto denominador, tengo que buscar un mínimo común, (hace una tabla para hacer factorización prima en la que anota 4 y 6).

$$\begin{array}{c|c} 4\text{-}6 & \\ \hline & \\ & \end{array}$$

Entonces empiezo a ver qué tipo de número es, entonces, el 4 y el 6 ¿pueden ser divisibles por 2?, sí (anota 2 al lado) y digo, el 2 ¿cuántas veces cabe en el 6?, tres, ¿el 2 en el 4?, dos (anota bajo los números 4 y 6 el 2 y el 3 respectivamente). Ahora, estos números que están acá (se refiere al 2 y al 3) ¿pueden seguir siendo divisibles por 2?, sí, el 2 (anota 2 al costado), el 2 en el 2, una vez (anota 1 bajo el 2) y ahí termino, así … y luego voy multiplicando (se refiere a los factores primos que quedan a la derecha) saco el número (se refiere al múltiplo común) y ahí sigo.

$$\begin{array}{c|c} 4\text{-}6 & 2 \\ \hline 2\text{-}3 & 2 \\ 1\text{-}3 & 3 \\ 1 & \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{c}2\\2\\3\end{array}}\right\} 2\cdot 2\cdot 3 = 12$$

Entonces el 12 es el mínimo común denominador (anota 12 en el denominador). Luego multiplico cruzado y sumo: 6 por 1 es 6, y 4 por 2 es 8, (anota 6+8 en el numerador y lo deja inconcluso porque duda) $\frac{1}{4}+\frac{2}{6}=\frac{6+8}{12}\dots$ (Karina)

En su descripción del procedimiento, Karina utiliza elementos de dos técnicas distintas: la de buscar el múltiplo común más pequeño y amplificar las fracciones para expresarlas como fracciones equivalentes con ese mínimo múltiplo común como denominador, con la de amplificar cada fracción por el denominador de la otra fracción para expresarlas como fracciones equivalentes con un múltiplo común como denominador. Este último procedimiento se simplifica a través del siguiente algoritmo: multiplicar ambos denominadores para obtener un múltiplo común (que no necesariamente será el más pequeño) y luego multiplicar cruzado (el denominador original de una fracción con el numerador de la otra) para originar los numeradores que deben ser sumados. Karina es consciente de que no está segura al señalar “no me acuerdo mucho”, también cuando agrega “pero uno igual tiene que ir estudiando a la par con ellos porque se olvida”

**Sobre los errores detectados con más frecuencia, y las acciones para subsanarlos**

Dentro de los errores más comunes las tres profesoras coinciden en que los estudiantes tienden a “sumar horizontalmente”, además mencionaron la dificultad para transformar una fracción impropia en número mixto y el desconocimiento de las combinaciones multiplicativas básicas.

> “Suman arriba y suman abajo, aunque tú les has enseñado que no se hace así. Yo creo que es porque no se dan cuenta de que es de distinto denominador, de repente. Cuando transforman les cuesta mucho expresar de número mixto a fracción impropia y viceversa, les cuesta eso también a los niños, harto. Les cuesta entender que es más que un entero”. (Fernanda)

> “No se saben las tablas de multiplicar (se refiere a las combinaciones multiplicativas básicas), y suman hacia el lado”. (Karina)

> “…suman numerador (hace el gesto indicando lo horizontal) y los denominadores algunos también los suman. O sea, suman el denominador y tienen que sumar solamente los numeradores, y mantener el denominador...” (Sonia)

Es decir, la observación de las profesoras está dando cuenta del tratamiento de la fracción en forma separada, no se considera la fracción como un objeto matemático que es un número en sí mismo, sino como una composición de dos números que se pueden operar independientemente.

Uno podría pensar que si un error se presenta con frecuencia, es probable que se haya reflexionado sobre el origen del problema para encontrar una solución. Sin embargo, la respuesta a la pregunta acerca de cómo se pueden subsanar los errores no es inmediata. Sonia piensa que se debe distinguir aún más la diferencia entre el numerador y el denominador, enfatizando en que el significado de este último se relaciona con el número de partes en que se divide el entero. Fernanda piensa inicialmente que quizás el trabajo con material concreto ayude un poco, pero lo ve complicado. Y Karina recurre al apoyo que puedan brindar otros compañeros:

> “Pienso que podría hacerse escribiendo el denominador con un color distinto, como para que sepan que ese se mantiene y arriba se puede ir eh…que son distintos, no es lo mismo. (El denominador se tienen que mantener) porque es la parte que indica la cantidad en la cual está dividido el entero, por eso eso no cambia…”(Sonia)

> “No sé, quizás trabajar más a nivel concreto con esa parte…igual es difícil trabajar en concreto con eso, es complicado trabajar con material concreto cuando son de distinto denominador.”(Fernanda)

"Le pido a un par que le ayude." (Karina)

Cuando se profundiza en el tema preguntándoles a qué podría deberse el error, Karina analiza la situación y vislumbra un origen posible. Fernanda, en cambio, no se explica el error, pero recuerda que en ocasiones, el trabajar con la recta numérica ha facilitado la resolución de las dificultades:

> "(Ese error puede ser producido) porque no se les ha enseñado lo lógico del por qué hacerlo…es difícil para uno explicar el por qué, yo encuentro que igual es difícil porque todo esto es súper abstracto, yo lo encuentro abstracto, para la edad de ellos…tú te preguntas el por qué de las cosas." (Karina)
>
> "trabajando en la recta numérica, ahí les cuesta muchísimo menos, no es mucho menos sino muchísimo menos. Visualmente lo entienden inmediatamente, más que con el dibujito, con el diagrama. Por qué, porque logran ver que todos los enteros son iguales, hay una distancia igual entre un número y el otro. Y eso les cuesta muchísimo menos, ubicar, por ejemplo cuando tú les dices ubique en la recta numérica las siguientes fracciones, dos enteros un tercio…no les cuesta nada (Fernanda)
>
> También he usado la recta numérica para hacer sumas (*con igual y con distinto denominador*), y me ha ido bien. Les cuesta menos, por qué, porque lo están viendo. No es una cuestión que lo están haciendo en forma mecánica sino que lo están viendo no más. Están viendo que ellos van a sumar este pedazo, más este otro pedazo. En la recta, es la mejor manera en que yo he podido probar trabajar lo que es fracciones..." (Fernanda)

Sonia da cuenta de que el error puede producirse porque no se entiende el significado del denominador; Karina señala que puede deberse al desconocimiento de los fundamentos de los procedimientos; Fernanda, no elabora una explicación, pero recuerda que al trabajar la fracción en la recta numérica permite visualizar el significado de la fracción como un pedazo que no se mide necesariamente en enteros. Es decir, todas las reflexiones nos hablan de una dificultad en la significación de las fracciones.

**Fundamento del algoritmo para sumar y restar fracciones**

Buscando saber si las profesoras comprenden los fundamentos matemáticos del algoritmo para operar aditivamente con las fracciones, se les preguntó qué responderían si un estudiante les preguntara por qué es necesario igualar los denominadores para sumar o restar fracciones

Sonia y Fernanda respondieron que nunca les habían formulado esa pregunta, lo que demuestra que el contrato didáctico opera muy fuertemente en el sentido que se espera que el estudiante siga las indicaciones del profesor.

> Nunca me lo han preguntado…porque tengo que dividir en partes i…porque a todos les tengo repartir lo mismo, entonces si los tengo de distinto denominador no les va a tocar lo mismo a cada uno, no va a ser parejo, no va a haber una división que se reparte en partes iguales, no va a ser equitativo, no va a ser justo.(Sonia)

> Nunca me han preguntado, ni me lo he planteado…Claro, uno les dice, no, es que tiene que ser igual para que los puedas sumar, pero no me lo he planteado… ¿será porque uno no puede sumar peras con manzanas?, no puedes mezclar, si te están preguntando por el número de manzanas. Puedes si te preguntan cuantas frutas hay, pero no si te preguntan sólo por las manzanas.(Fernanda)

Karina, en cambio, señala que le han hecho la pregunta, pero reacciona autocríticamente señalando que "sale del paso" aludiendo a que es constitutivo del procedimiento, confirmando otro precepto del contrato didáctico que señala que el profesor siempre sabe"

> (Le han preguntado), claro, pero uno comete el error de decir que, bueno, hay una técnica, un mecanismo y es así, hay que aprendérselo y es mecánico (Karina)

#### *4.1.3.4 Síntesis de las concepciones de los profesores*

Respecto a aquello que los estudiantes deben comprender para que puedan aprender a sumar y restar fracciones, las tres profesoras coincidieron en que es fundamental que comprendan qué es una fracción. El concepto de fracción que tienen las profesoras, como una parte de un entero, toma como referencia el significado parte-todo. Todas se apoyan en su representación gráfica o en material concreto para explicarlo de ese modo. Esto puede obstaculizar la comprensión de la fracción como un número que permite expresar cantidades no enteras mayores que la unidad, ya que en las explicaciones apoyadas en diagramas que mencionaron, el todo es siempre un entero.

Otros conocimientos previos mencionados por las profesoras fueron: los tipos de fracciones según su relación entre el numerador y el denominador (propias e impropias); los números mixtos; identificación de múltiplos y divisores; y las operaciones con los números naturales. Sólo una de las tres profesoras mencionó que es importante el orden, la comparación y la equivalencia de fracciones. Dichos elementos son importantes para comprender el concepto, y la equivalencia de fracciones, especialmente, permite fundamentar el algoritmo para la adición y la sustracción.

Al referirse a cómo piensan que debe enseñarse este tema, las tres profesoras inicialmente se apoyan en el registro gráfico (diagramas o una hoja que es fraccionada sucesivamente frente a los estudiantes) para sumar y restar fracciones de igual denominador, paralelamente van realizando el registro numérico. Luego, para sumar y restar fracciones con distinto denominador, adoptan distintas estrategias.

Sonia intenta problematizar a los estudiantes pidiéndoles que expresen la cantidad reunida al "juntar los pedacitos" de dos fracciones con distinto denominador representadas en diagramas, y busca concluir que es conveniente transformarlas para que tengan igual denominador. En ese momento hace un paréntesis en el trabajo con fracciones, comienza a trabajar los múltiplos y divisores de un número, y posteriormente los múltiplos comunes. Es decir, se utiliza el registro gráfico para dar cuenta de la necesidad de utilizar "pedazos comparables", antes de comenzar a utilizar el algoritmo. En adelante, el foco está puesto sobre lo pragmático: qué necesitan ir sabiendo para sustentar el paso siguiente.

Fernanda, también recurre al registro visual apoyándose en la recta numérica para visualizar la suma, que realiza numéricamente con el algoritmo tradicional de amplificar las fracciones para igualar los denominadores. A ella le preocupa que los estudiantes no actúen mecánicamente, no tiene claridad acerca de cómo fundamentar el algoritmo. Sin embargo, busca que los estudiantes vean que aquello que hacen tiene sentido, al apreciar que la fracción que resulta de la suma de dos fracciones, se corresponde con el punto que se ubica exactamente sobre el extremo de la adición geométrica de las dos fracciones representadas como intervalos o trozos de la recta numérica. En este caso, se recurre al registro visual como una forma de validar la eficacia del algoritmo, después de haberlo utilizado, pero no llega a fundamentar la secuencia aritmética que lo constituye.

Karina, por otra parte, identifica la relación entre los denominadores en términos de igualdad y diferencia y enseña directamente las técnicas respectivas de manera numérica. Ella atiende a lo pragmático, y describe los pasos sucesivos que debe seguir, sin que exista necesidad de fundamentarlos. En ese proceso, combina técnicas de dos algoritmos distintos (buscar el mínimo denominador común, y multiplicar cruzado) sin llegar a darse cuenta que con ello no está dando origen a dos fracciones equivalentes.

El error identificado como más común por las profesoras es la suma horizontal, seguido de la expresión de una fracción como número mixto o viceversa, pues hay dificultad para comprender que una fracción puede ser más que un entero. Ambos conflictos se relacionan con el estatus epistemológico de la fracción, y dan cuenta de que el significado que se da a la fracción, es una variable didáctica importante.

Todas las descripciones acerca de las maneras en las que se abordan las fracciones en el aula, utilizan como referente el significado parte-todo. Y ocurre que, por una parte, esta interpretación dificulta la conceptualización de fracciones mayores que un entero; y, por otra, no permite visualizar a la fracción como un número en sí, que cuantifica cantidades no enteras cualesquiera que sean. Al contrario, la visualiza como un objeto compuesto por dos partes (arriba y abajo, numerador y denominador) que podrían ser operadas separadamente.

Esta idea se refrenda con dos situaciones. Primero, la experiencia relatada por Fernanda al señalar que logra una comprensión mayor por parte de los estudiantes cuando trabaja con apoyo de la recta numérica, también da cuenta de la importancia de esta variable, pues en esa situación, la fracción ya no es una parte de un todo, sino una medida no entera de un trozo de la recta. Además, esta significación cuenta con un respaldo visual.

Segundo, si analizamos las explicaciones de las profesoras acerca del origen del error: dificultad para entender el significado del denominador y el fundamento de los procedimientos. Las propias profesoras no conocen el fundamento matemático para el procedimiento de igualar denominadores. Sólo la profesora que en distintos momentos de la entrevista mostró preocupación por darle sentido al trabajo con los objetos matemáticos, se acercó a la idea de tener fracciones comparables mediante un referente o medida común.

Por lo tanto, en relación con el uso del algoritmo podemos observar que dos de las tres profesoras intentan fundamentar el algoritmo a utilizar. Sonia mediante la búsqueda de pedazos comparables, quiere demostrar que es necesario igualar los denominadores antes de sumar. Fernanda, mediante la representación geométrica de la adición en la recta numérica, demuestra que el algoritmo funciona. Sin embargo, no se aprecia un dominio de los fundamentos matemáticos de cada uno de los pasos del algoritmo. En el caso de la tercera profesora, Karina, se observa que tiende a actuar mecánicamente sin llegar a comprender las técnicas que componen los algoritmos.

### 4.1.4 Conclusiones generales del análisis preliminar

Mediante el **análisis epistemológico** se pudo establecer que las fracciones se originaron a partir de la necesidad de expresar cantidades no enteras, esa es funcionalidad, y es la razón que le da sentido a su existencia. Es importante entonces comprender que la fracción es un tipo de número que sirve para cuantificar cantidades no enteras.

Por otra parte, la revisión de las investigaciones realizadas en torno al tema permitió constatar el alto grado de complejidad de esta temática, lo que la constituye en una de las más estudiadas en matemática educativa (Fandiño, 2005). La hipótesis que ha cobrado más fuerza, sugiere que las variadas dificultades en relación con el aprendizaje de fracciones se derivan de los múltiples significados que éstas tienen en el discurso matemático escolar (Fandiño, 2005; Flores, 2010; T. E. Kieren, 1988). Otros planteamientos destacan la importancia de la funcionalidad de los saberes (Brousseau, 1986), y de la didáctica empleada en la enseñanza (Brousseau, 1986; Perera y Valdemoros, 2007).

A través del **análisis cognitivo** se pudo establecer que los y las estudiantes conciben las fracciones bajo el significado parte-todo, pues se les ha presentado como un objeto matemático que se forma al dividir un entero en partes iguales, y considerar algunas de aquellas partes. No conocen la funcionalidad de las fracciones ni son capaces de brindarles un sentido. La representación gráfica de la fracción en diagramas consistentes en un entero dividido en partes iguales con algunas partes pintadas, justifica y refuerza el concepto recién descrito. En definitiva, las fracciones son vistas en forma escindida como dos números llamados numerador y denominador, separados por una línea, que representan respectivamente las partes consideradas (suelen decir “pintadas”), y las partes en las que se ha dividido el todo.

En relación con el algoritmo de la adición y sustracción de fracciones, algunos son capaces de utilizarlo, y unos pocos de describirlo. No saben justificar el procedimiento ni los pasos que lo componen.

Del **análisis didáctico** es posible concluir que los libros de texto están organizados en base a una premisa de adquisición de conocimientos por sobre una de construcción de conocimientos. En ese contexto, las técnicas de cálculo, cobran un valor pragmático fundamental, sin llegar a atender su significación ni su funcionalidad. Los problemas no son utilizados como medio para el aprendizaje sino como una posibilidad de aplicación de las técnicas.

El significado de referencia casi exclusivo es el significado parte-todo. El registro gráfico es utilizado para visualizar la relación de la parte con el todo, mencionando en más de un 90% de los casos fracciones propias.

No se controla la presentación de la relación entre los denominadores de las fracciones como una variable que permitiría graduar la complejidad de la construcción del algoritmo.

Las estrategias y las técnicas son entregadas por el texto en forma previa a su utilización en ejercicios y problemas. No se considera la posibilidad de su construcción por parte de los y las estudiantes. Nuevamente observamos la ausencia de valoración del significado y la funcionalidad de los conocimientos matemáticos.

Por otra parte, las tres profesoras entrevistadas brindan importancia a la comprensión del concepto de fracción, pero ellas mismas sólo tienen incorporada la interpretación como una relación parte-todo, y se apoyan en la representación gráfica para visualizar el objeto y su significado. Por esta razón, no les es posible conceptualizar la fracción en sus otras interpretaciones ni como un número racional, que cuantifica cantidades no enteras cualesquiera que sean.

En relación con la enseñanza del algoritmo hay atisbos de problematización, pero en general el énfasis está puesto en lo pragmático: la necesidad de enseñar los procedimientos que permitan avanzar hacia el paso siguiente. No son capaces de fundamentar el procedimiento, pues más allá de lo pragmático, no saben por qué es necesario igualar los denominadores.

**En síntesis**, de este análisis se desprenden los siguientes aspectos a considerar en la construcción de la secuencia didáctica y en el análisis a priori:

- Uno de los factores que inciden en el proceso de aprendizaje es el enfoque didáctico, específicamente, el grado de participación de los y las estudiantes en el proceso de aprendizaje. Esta idea ha sido planteada tanto por expertos como por los propios aprendices.
    - Por lo tanto, la secuencia didáctica debe propiciar espacios para que los propios estudiantes construyan los conocimientos.
- Es importante que los conocimientos sean funcionales y tengan sentido.
    - Por lo tanto, la situación didáctica debe permitir revivir la emergencia histórica del concepto para comprender que la fracción es un tipo de número que sirve para cuantificar cantidades no enteras.
    - proponer situaciones problemáticas en las que la adición sea la operación que resuelve el problema

- Los significados asociados a las fracciones son uno de los factores que inciden en las dificultades de aprendizaje de las mismas.
    - Por lo tanto, puesto que nos interesa que el saber construido sea funcional, es necesario seleccionar aquellos significados que favorezcan la construcción del conocimiento con esa característica.
- El significado parte- todo es el significado hegemónico en el DME. Así se apreció en libros de texto y conceptualizaciones de estudiantes y profesores. El uso exclusivo del significado parte-todo no favorece la construcción del concepto de fracción como número. Ello se pudo constatar a través de los relatos de estudiantes y profesores. Para subsanar dicha dificultad, esta secuencia considerará:
    - la interpretación de medida para ampliar la conceptualización de la fracción más allá de la idea de parte-todo.
    - la interpretación de medida para proponer problemas que sean resueltos naturalmente mediante adición.
    - y la interpretación de razón para promover el concepto de igualdad o equivalencia entre fracciones.
- Las fracciones propias y su representación en diagramas refuerzan el significado parte-todo.
    - Es importante trabajar paralelamente con fracciones propias e impropias para conceptualizar la fracción como número.
- La relación entre los denominadores de las fracciones determina distintos grados de complejidad del algoritmo de la adición de fracciones.
    - Es importante considerar esta variable en la graduación del proceso de construcción de dicho algoritmo.
- Ni profesores ni estudiantes son capaces de fundamentar matemáticamente el algoritmo de la adición de fracciones. Las técnicas y los algoritmos son presentados a los estudiantes, ya sean a través de los libros de texto, o de la explicación de las y los profesores, y posteriormente se los aplica para hacer cálculos o resolver problemas. Los problemas no son concebidos como medios que promueven el aprendizaje.
    - Es importante problematizar a los estudiantes, de manera que la situación en la que se los ponga les provoque un conflicto que deban resolver construyendo los conocimientos requeridos para ello.

## 4.2 Fase de diseño

Esta secuencia didáctica tiene por objetivo central que los y las estudiantes construyan y justifiquen un procedimiento de cálculo para resolver problemas aditivos con fracciones, atendiendo las múltiples consideraciones emanadas del análisis preliminar, determinamos las ideas claves para conseguir tal propósito. Necesariamente, en una primera instancia la secuencia debe permitir que los y las estudiantes amplíen el concepto de fracción, conceptualizándola como un número útil para cuantificar medidas y/o cantidades no enteras. En segundo lugar, debe abordar la noción de igualdad o equivalencia entre fracciones, de manera de poder establecer que en las fracciones, una misma cantidad se puede expresar con fracciones escritas en forma distinta. Además, es preciso que los y las estudiantes construyan los procedimientos para expresar fracciones equivalentes (amplificación y simplificación). Sólo entonces, los y las estudiantes estarán en condiciones de construir un procedimiento fundamentado para sumar fracciones.

Estas tres ideas claves se articularon con las situaciones experimentales[11] planteadas por Brousseau (1986) para establecer los propósitos a tratar en cada sesión. Y dichos propósitos, permitieron establecer las variables didácticas, y la progresión de tareas y técnicas a abordar en cada una de ellas.

Las variables didácticas consideradas en la secuencia fueron:

Significado de la fracción: Como medida para la cuantificación de los trozos de yuan[12] y como razón para el establecimiento de las fracciones equivalentes[13].

Relación entre los denominadores: Iguales o distintos. Uno múltiplo del otro, con un factor en común, o primos entre sí (sin factor común).

Tipo de fracción: propia o impropia[14].

Disponibilidad del material: disponible en el trabajo de cuantificación y de las equivalencias; no disponible para la construcción del procedimiento de cálculo.

---

[11] Tal como se señaló en el marco teórico, Brousseau distingue, en contextos experimentales, situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización.

[12] El trozo de cinta que se utilizó como referente entero se bautizó como yuan, es un nombre de fantasía.

[13] Aun cuando no es el propósito de la actividad, es posible que emerja el significado parte-todo producto de su marcado arraigo cultural.

[14] Se trabajaron indistintamente ambos tipos de fracciones, puesto que favorece la construcción de la fracción como medida.

Disponibilidad de trozos de un mismo tipo: mayor o igual que un medio y menor a una unidad (por ejemplo dos trozos de un tercio, tres de un cuarto, tres de un quinto, etc). Menor que una unidad para incentivar la construcción del concepto de fracción como medida y no el de parte-todo. Mayor o igual que un medio para facilitar el establecimiento de relaciones de equivalencia.

Es importante señalar que los cuatro tipos de situaciones experimentales distinguidos por Brousseau, se podrán visualizar tanto al interior de cada sesión (si observamos la acción de los y las estudiantes en relación con el propósito de la sesión), como a través del ciclo completo de la secuencia. En este último caso, si analizamos el trabajo de los y las estudiantes en relación con el propósito final de la secuencia, podremos notar que en cada sesión se irán institucionalizando conocimientos que servirán de base para la construcción de otro posterior, hasta llegar a la construcción del algoritmo. De manera que lo que internamente es acción, formulación, validación, o institucionalización, forma parte de la situación de acción global en el caso de las tres primeras sesiones; de la situación de formulación global en la cuarta; y de la de validación e institucionalización global en la quinta.

Aunque no es posible prever exactamente en este análisis cuántas situaciones de cada tipo surgirán en una situación de aula real, se ha señalado entre paréntesis el tipo de situación que se espera emerja a través de cada sesión.

En concordancia con lo anterior, la progresión de las tareas y de las técnicas que se espera propiciar a través de la secuencia en relación con los propósitos de cada sesión, se sintetiza en el siguiente cuadro:

**Tabla 1**

| Sesión | Propósito de la sesión | Tarea(s) | Técnica(s) |
|---|---|---|---|
| **1° y 2°** | Experimentar con fracciones, problematizando el concepto de fracción como medida.<br><br>Conceptualizar la fracción como un número que permite cuantificar medidas y/o cantidades no enteras | -Medir la longitud de cintas no numeradas utilizando una unidad de medida arbitraria (yuan) y trozos de ella.<br>- Cuantificar las mediciones realizadas con los trozos utilizando más de una fracción (cuantificar la medida de cada uno de los trozos de yuan).<br>-Expresar las medidas de las cintas de la sesión anterior utilizando un solo referente (cuantificar las mediciones utilizando una sola fracción o un entero y fracción) | -Componer la longitud dada con trozos menores utilizando material concreto.<br>-Repetir el trozo tantas veces sea necesario para componer un yuan.<br>-Construir reglas graduadas y medir la longitud de las cintas con ellas. |
| **3°°** | Experimentar con la relación entre las fracciones, problematizando el concepto de equivalencia.<br><br>Conceptualizar la igualdad o equivalencia entre fracciones: una misma cantidad se puede expresar con fracciones que utilizan diferente unidad de medida. | -Dadas dos fracciones que expresan la misma cantidad (cuya igualdad se ha verificado previamente con material concreto), determinar la operación matemática permite expresar una fracción en los términos de la otra. | -Amplificar una fracción: multiplicando numerador y denominador por un mismo número.<br>-Simplificar una fracción: dividiendo numerador y denominador por un divisor común. |
| **4°** | Determinar el sumando que reemplaza | -Dada una suma fracciones ya | Para determinar el sumando |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | convenientemente a uno conocido mediante una convención matemática.<br><br>Construir un procedimiento estándar para sumar fracciones cuyos denominadores son uno múltiplo del otro, sin tener que recurrir a las reglas graduadas. | resuelta (cuya igualdad se ha verificado previamente con material concreto) en la que uno de los sumandos tienen el mismo denominador que la suma, determinar qué otro sumando puede reemplazar al que tiene un denominador distinto a la suma. Utilizar dicho procedimiento para sumar fracciones. | "desconocido": vivir un proceso de convención matemática.<br>Para efectuar la suma: buscar la familia de fracciones equivalentes a uno de los sumandos, y luego sumar mediante conteo. |
| **5°** | Profundizar en los fundamentos que sustentan el procedimiento construido en la sesión anterior.<br><br>Generalizar el procedimiento estándar para sumar fracciones cuyos denominadores se relacionan de diversos modos. | Resolver sumas de fracciones cuyos denominadores son uno múltiplo del otro, tienen un factor común o son primos entre sí. | Para efectuar la suma: buscar la familia de fracciones equivalentes a ambos sumandos, y luego sumar mediante conteo. |

**Presentación y análisis de la Secuencia didáctica por sesión**

Durante las dos primeras sesiones, el o la estudiante trabajará actividades para problematizar el concepto de fracción como medida. A través de ambas sesiones se espera que los estudiantes formulen el producto de sus descubrimientos y discutan acerca de la validez de sus afirmaciones. Al finalizar éstas, se espera que los y las estudiantes hayan conceptualizado el objeto matemático "fracción" como un número que permite cuantificar medidas y/o cantidades no enteras (institucionalización).

**Primera Sesión**

Esta fase se inicia con una **primera sesión** en la que se plantea la necesidad de medir la longitud de unas cintas no numeradas utilizando como referente una unidad de medida desconocida, llamada yuan.

En la pizarra están ubicadas las siguientes cintas blancas (ilustración 13), sin las divisiones, las que deben ser medidas por los estudiantes organizados en grupos. Las divisiones y las respectivas expresiones de la medida de las cintas que se presentan aquí son tentativas, ya que las mismas pueden ser compuestas por otros trozos de yuan que determinen una longitud equivalente.

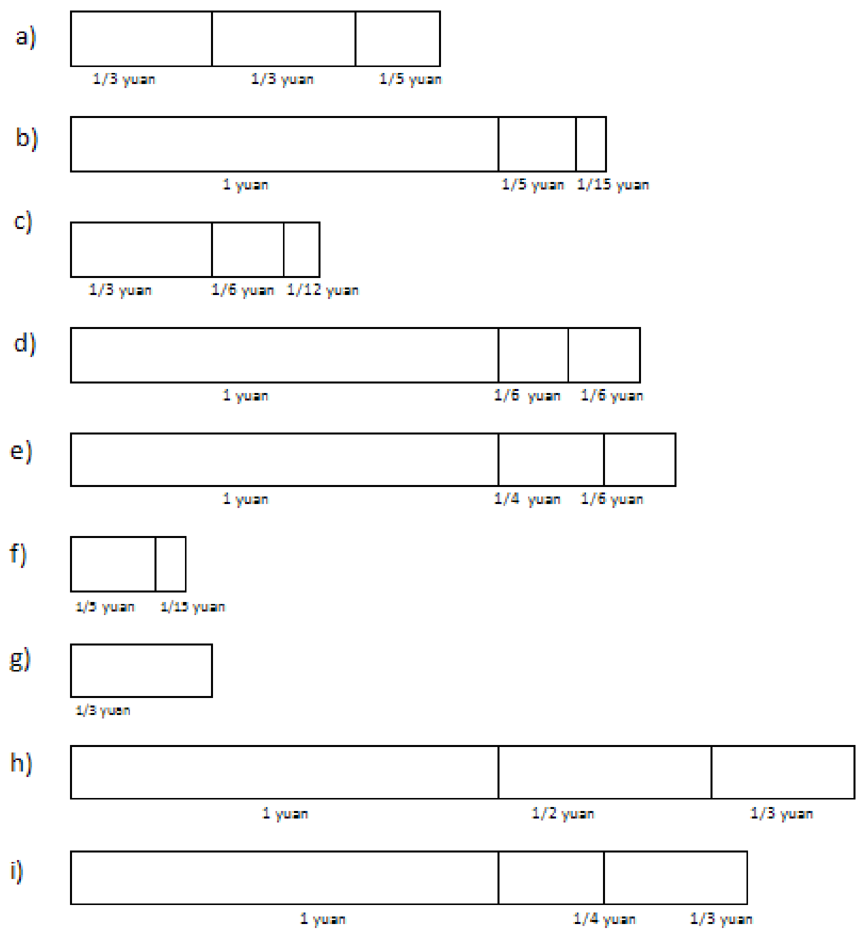



**Ilustración 13**

Para ello, cada grupo dispone de dos set con una cinta cuya longitud es una unidad de medida arbitraria (1 yuan) y varios trozos de diferentes colores y tamaños que representan fracciones unitarias del yuan ($\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{1}{10},\frac{1}{12},\frac{1}{15},\frac{1}{20}$) cuya cuantificación no es conocida por los estudiantes. Además tienen micas transparentes que miden 1 yuan y plumones que permiten escribir en ellas.

En una primera instancia se le pide a uno o dos estudiantes de cada grupo que pasen a medir cada uno una cinta distinta utilizando los trozos que tiene en su grupo. Se les indica que peguen los trozos elegidos debajo de la cinta. Se espera que seleccionen dos o tres trozos que en conjunto compongan la longitud de cada cinta puesta en la pizarra (acción).

Una vez que han sido medidas todas las cintas, la o el docente problematiza la situación preguntando al curso "¿cuánto mide esta cinta?". Se espera que los estudiantes señalen que para poder comunicar la cuantificación de la medida, es necesario averiguar a qué parte de 1 yuan corresponde cada uno de los otros trozos de colores utilizados para medir las cintas blancas.

Luego de establecida dicha idea, la o el docente toma uno de los trozos fraccionarios y le pregunta al curso "¿qué podríamos hacer para averiguar a qué parte de 1 yuan corresponde este trozo?" La discusión debería ser gestionada por el/la docente de manera tal que surja la idea de repetir varias veces la medida del trozo hasta ver cuántos de ellos componen un yuan (formulación). Luego les pide que investiguen la medida de cada trozo de color (acción).

Es posible que algún grupo utilice las micas transparentes y plumones para marcar las medidas en ellas, construyendo así, "reglas graduadas en fracciones de yuan"; pero también puede ocurrir que muchos repitan la medida del trozo utilizando el yuan de cartulina como referente, haciendo pequeñas marcas o incluso sin anotar. En este momento de la clase, el interés está puesto en investigar el valor de cada trozo de yuan, por lo tanto la construcción de las reglas no es indispensable. Una vez que han averiguado el valor de cada trozo de color, cuantifican las mediciones de las cintas blancas y las anotan en una ficha grupal (ficha 1, ilustración 14).

Cuando todos los grupos han efectuado sus mediciones, se realiza una puesta en común registrando las medidas en la pizarra en una tabla similar a la de la ficha. Si hay más de una forma de expresar la medida, se anota cada opción surgida y se discute acerca de la equivalencia entre las distintas combinaciones que componen la medida.

Ficha 1.

¿Cómo podríamos expresar cuánto mide cada una de estas cintas?
Una vez que hayan decidido cómo hacerlo, anoten las mediciones en la tabla:

| Cintas | Medida |
|---|---|
| a) | 1/3 + 1/3 + 1/5 |
| b) | … |
| c) | 1/3 + 1/6 + 1/12 |
| d) | 1 + 1/4 +1/6 |
| … | … |
| i) | |

**Ilustración 14**

Al cierre de esta actividad, siempre y cuando haya surgido a partir de los planteamientos de los estudiantes, es importante dar énfasis a que existe más de una manera de expresar las medidas, y si es posible, identificar las igualdades entre algunas de las fracciones utilizadas y dejarlas registradas a un costado de la pizarra.

En este momento el/la docente incentiva la reflexión acerca del sentido de existencia de las fracciones con preguntas tales como ¿por qué tuvimos que utilizar fracciones en esta actividad? ¿Para qué nos sirvieron las fracciones? Si las medidas hubiesen sido cantidades enteras, ¿habríamos necesitado usar fracciones? ¿Cómo podemos estar seguros de que es así? Las intervenciones de los/las estudiantes plantearán situaciones de formulación o de validación según comuniquen informaciones o defiendan la validez de las afirmaciones expresadas.

**Actividad 1** (Síntesis para la o el docente)

Materiales: cinta que representa una unidad de medida desconocida (yuan), varios trozos de diferente tamaño y color menores que un yuan, micas de transparencias y plumón.

Necesitamos medir estas cintas blancas en una unidad de medida distinta a las nuestras, en “yuan”. Tenemos un yuan, y también tenemos trozos que son parte de esta unidad de medida.

a) ¿Qué podríamos hacer para medir las cintas?

b) ¿Cómo podríamos expresar **cuánto** mide cada una de estas cintas?

## Segunda sesión

En la **segunda sesión** se plantea el desafío de expresar las medidas de las cintas de la sesión anterior utilizando un solo referente: una sola fracción de yuan, o un yuan y fracción dependiendo si la cinta es mayor o menor que un entero (acción). El/la docente inicia la clase formulando la pregunta "¿Qué podemos hacer para expresar las mediciones realizadas en la clase anterior utilizando un solo referente (cuartos, quintos, sextos, etc)?. En la pizarra están puestas las cintas y la tabla con sus respectivas mediciones.

Se espera que los estudiantes propongan utilizar unas reglas graduadas, construidas con las micas disponibles, como procedimiento. Si en la clase anterior no surgió la idea de utilizar las micas para marcar sucesivamente la medida de los trozos pequeños de yuan, se les puede preguntar directamente si las micas podrían ayudar a resolver el problema. Si la idea de las reglas graduadas surgió, pero de manera aislada, el /la docente conduce una reflexión acerca de su utilidad, pidiendo al o a los grupo(s) que usaron la regla que expliquen por qué les resultó útil (formulación). Luego, incentiva a cada grupo a construir sus propias reglas para poder medir utilizando, en cada una de ellas, una sola fracción como referente.

Cuando cada grupo tiene sus reglas, se les plantea utilizarlas para expresar la medición con una sola fracción. Para ello, simultáneamente, sale un integrante de cada grupo a medir una cinta cualquiera y la anota en su ficha grupal. Luego, sale otro integrante de cada grupo a medir otra cinta, y así sucesivamente hasta que cada grupo ha medido todas las cintas.

Una vez que todos los grupos han terminado de medir, se realiza una puesta en común anotando las mediciones en la ficha 2. Es importante que, si hay más de una forma de expresar la medida de una cinta, se anoten las distintas opciones en la tabla (ilustración 15), puesto que al terminar la actividad, la o el docente se apoyará en ella para conducir una reflexión acerca de la equivalencia o igualdad entre fracciones.

Ejemplo de tabla:

| Cintas | Medida en yuan y fracciones de yuan | |
|---|---|---|
| | Utilizando más de un referente<br>Expresión compuesta | Utilizando un solo referente<br>Expresión simple |
| a) | | |
| b) | | 19/15 de yuan |
| c) | | 7/12 de yuan |
| d) | | 1 yuan y 1/3 de yuan |
| … | | |
| i) | | |

**Ilustración 15**

Para ello, es conveniente relacionar las fracciones de la primera y segunda escritura con la que utiliza un solo referente, enfatizando que la suma de fracciones unitarias de yuan es igual a una fracción no unitaria que utiliza una unidad de medida o referente común a ambos sumandos. Es decir, que si repito 13 veces un quinceavo, formaré la misma medida que 1/3 + 1/3 + 1/5, porque con 5/15 formo 1/3 y con 3/15 formo 1/5. Lo mismo ocurre si repito 2 veces 1/3 formo 2/3. Es decir, lo importante es hacer notar que dicha medida común se repite varias veces para formar la fracción no unitaria. Es conveniente invitar a los estudiantes a verificar dichas igualdades con los trozos de yuan (acción).

En el cierre de la sesión (institucionalización) interesa relevar la idea de que <u>una suma de fracciones se puede expresar como una sola fracción que utiliza como referente una unidad de medida común a todos los sumandos</u>. Por ejemplo, en el caso de la cinta c) se les puede preguntar qué tienen en común el los doceavos, los sextos y los tercios, buscando que emerja como idea que los sextos y los tercios se pueden medir en doceavos (pueden superponer las reglas graduadas para ello). Lo mismo se puede realizar con cada una de las otras cintas: los tercios y los quintos se pueden medir en quinceavos; los cuartos y los sextos en doceavos, etc. Por otra parte, es conveniente retomar la conclusión de la sesión anterior que indicaba que <u>las fracciones son útiles para expresar la medida de cantidades no enteras</u>

Es importante dejar registradas en la pizarra las distintas equivalencias surgidas en la clase (entre una fracción y otra, o entre una suma y una fracción), pues serán retomadas en la tercera y cuarta sesión respectivamente (ilustración 16).

**Actividad 2** (Síntesis para el o la docente)

Materiales: micas para hacer reglas graduadas en yuan. Cintas pegadas en la pizarra.

Por grupos, participarán en una actividad consistente en construir reglas graduadas en yuan para medir las cintas que están en la pizarra. De este modo podrán expresar las mediciones con un solo referente o unidad de medida: una sola fracción de yuan, o un yuan y una fracción dependiendo si la cinta es mayor o menor que un entero.

Por turnos, sale un estudiante de cada grupo a medir una cinta, y anota la medición en la ficha 2. Después de que cada grupo haya medido todas las cintas se realizará una puesta en común.

**Ficha 2**

| Cintas | Medida en yuan y fracciones de yuan | |
|---|---|---|
| | Utilizando más de un referente<br>Expresión compuesta | Utilizando un solo referente<br>Expresión simple |
| a) | | |
| b) | | 19/15 de yuan |
| c) | | 7/12 de yuan |
| d) | | 1 yuan y 1/3 de yuan |
| … | | |
| i) | | |

**Ilustración 16**

**Tercera sesión**

La **tercera sesión** tiene por objetivo que los y las estudiantes puedan consolidar la idea que señala que una misma cantidad se puede expresar con fracciones que utilizan diferente unidad de medida (validación). Y que surja el concepto de amplificación y simplificación como procedimientos útiles para expresar una fracción como otra igual con distinta unidad de medida como referente. Para ello el docente problematiza a los estudiantes mediante diversas preguntas que los obliga a experimentar situaciones de formulación y validación en relación con el significado de los procedimientos de amplificación y simplificación. Se espera que al final de la sesión se institucionalicen dichos procedimientos como técnicas válidas para generar fracciones iguales a otras dadas utilizando diferentes unidades de medida como referente.

El o la docente inicia la clase escribiendo en la pizarra algunas de las igualdades entre fracciones individuales surgidas en las sesiones anteriores.

El o la docente comienza la sesión recapitulando lo trabajado en las fases anteriores: señala [15] que en la *primera sesión* midieron las cintas utilizando yuanes y trozos de yuanes, y que luego expresaron cuánto mide cada cinta. En este momento les pregunta a niños y niñas si esa actividad les permitió descubrir para qué sirven las fracciones. La idea es destacar el carácter funcional de las mismas. Se espera que respondan que sirven para expresar cantidades o medidas no enteras. En la *segunda sesión* expresaron la medida de cada cinta como una sola fracción de yuan, o un yuan y una fracción utilizando las reglas graduadas en yuan. Recuerda que a través del trabajo realizado en ambas sesiones, fueron surgiendo las igualdades o equivalencias que ha anotado nuevamente en la pizarra y pregunta:

$$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

*¿Qué operación matemática nos permite expresar esta fracción (por ejemplo $\frac{2}{8}$) como esta fracción ($\frac{1}{4}$) ?*

Se espera que chicos y chicas señalen que deben dividir en dos tanto el numerador como el denominador de la fracción $\frac{2}{8}$. O bien multiplicar por dos el numerador y el denominador de la fracción $\frac{1}{4}$.

Es importante aquí profundizar en dos ideas que frecuentemente se convierten en obstáculos didácticos:

-se produce una confusión entre la división o la multiplicación de la fracción y la división o multiplicación de numerador y denominador como procedimiento para buscar fracciones iguales con distinta medida

-los estudiantes piensan que al simplificar se achica la fracción y que al amplificar, se agranda

[15] También puede gestionar el inicio con preguntas conducentes a rememorar lo realizado en las sesiones previas.

Resulta muy conveniente, en ese sentido, problematizar a los estudiantes tomando el material concreto y mostrando que al dividirlo o multiplicarlo no se origina la igualdad. Por ejemplo se pueden tomar dos trozos de 1/8 de yuan, juntarlos frente al curso y preguntar:

> *Estos, ¿son $\frac{2}{8}$? Si los divido en dos (los separa) ¿obtengo $\frac{1}{4}$?*
>
> *Este trozo, ¿corresponde a $\frac{1}{4}$. Si lo multiplico por dos (toma otro cuarto y lo pone junto al primero) ¿obtengo $\frac{2}{8}$?*[16]

Es probable que en este momento surja el concepto de amplificación o simplificación como respuesta a la problematización respecto de la división y la multiplicación. Es decir, no se divide la fracción sino se simplifica y no se multiplica la fracción sino se amplifica. Entonces se puede abordar la segunda problemática preguntándoles qué es simplificar y amplificar. Con bastante frecuencia los y las estudiantes señalan que amplificar es agrandar y que simplificar es achicar la fracción, entonces es pertinente contrastar dicha afirmación tomando material concreto y preguntando:

> *¿Si $\frac{1}{4}$ lo amplifico por dos obtengo $\frac{2}{8}$?(toma $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{8}$ de yuan y los pone uno arriba del otro de manera que ambos queden visibles)*
>
> *¿Se agrandó este cuarto?¿Cómo quedó?¿Podemos afirmar que cuando amplificamos agrandamos la fracción?*

Otra posibilidad para verificar las igualdades es sobreponer las reglas graduadas en las unidades de medida presentes en la igualdad.

Después de que los estudiantes han establecido fehacientemente que la simplificación y la amplificación son procedimientos que nos permiten expresar una fracción en otra igual pero con distinta unidad de medida, y los han validado con cada una de las igualdades establecidas en las clases anteriores, se les entrega la **ficha 3** (individual): buscando la misma fracción.

**Ficha 3: Buscando la misma fracción**

1.- En la actividad anterior, pudieron establecer que una misma fracción se podía expresar con distinta unidad de medida, sin que la fracción cambie. Utiliza lo aprendido para buscar cuatro expresiones distintas para las siguientes fracciones:

| Medidas | |
|---|---|
| a) | $\frac{1}{2}=$ |
| b) | $\frac{3}{15}=$ |
| c) | $\frac{2}{3}=$ |
| d) | $\frac{1}{6}=$ |

**Ilustración 17**

[16] Es aconsejable, a lo largo de esta sesión, repetir esta problematización cuantas veces sea necesario, ya que es muy común confundir la simplificación con la división de la fracción y la amplificación con la multiplicación de la fracción.

Una vez que todos han desarrollado su ficha, se realiza una puesta en común contrastando las diversas respuestas dadas por los y las estudiantes.
Se cierra la clase retomando las problemáticas centrales: simplificar v/s dividir-achicar y multiplicar v/s multiplicar-agrandar, para precisar los conceptos de amplificación y simplificación, y reflexionando acerca de la posibilidad de establecer infinitas fracciones iguales a una dada.

**Cuarta sesión**

En la **cuarta sesión** el propósito es que los y las estudiantes se basen en las relaciones y técnicas trabajadas en las sesiones anteriores para construir un procedimiento estándar para sumar fracciones sin tener que recurrir a las reglas graduadas (éstas pueden ser utilizadas para verificar igualdades, pero no para realizar la suma).

Para ello la o el docente ha organizado previamente algunas de las equivalencias de la tabla construida en la segunda sesión, en función de la relación entre los denominadores de la suma y seleccionado dos o tres igualdades de entre aquellas en la que los denominadores de la suma son múltiplos entre sí.[17]. Con apoyo en estas expresiones se pretende inducir, mediante la siguiente reflexión, la conveniencia de amplificar una de las fracciones para expresarlas con un mismo referente o unidad de medida:

*-¿Podemos expresar las mediciones realizadas en la clase anterior como una suma?*

*-¿A qué sería igual* $\frac{3}{4}+\frac{1}{8}$ *de yuan? Consulten la tabla.*

*-Entonces ¿Cómo podríamos expresar esta suma de fracciones* $\frac{3}{4}+\frac{1}{8}$ *de yuan como una sola fracción?*

*-Recordemos algunas equivalencias establecidas en la clase anterior. Por ejemplo, ¿estamos de acuerdo en que estas expresiones son iguales?* $\frac{3}{4}+\frac{1}{8}$ *de yuan* $=$ $\frac{7}{8}$ *de yuan*

*-Si no tenemos las cintas, ¿qué pasos podríamos seguir para hacer la transformación?*

*-(tapando el primer sumando de* $\frac{3}{4}+\frac{1}{8}$ *de yuan* $=$ $\frac{7}{8}$ *de yuan) ¿qué fracción debería ir aquí para que sumado a 1/8 permita obtener 7/8? (Se espera que los y las estudiantes respondan 6/8)*

*-Por lo tanto, ¿podemos afirmar que 6/8 es equivalente a 3/4?*

*-(Si hay dudas pregunta) ¿Alguien puede venir a verificar con la cinta graduada que 6/8 es equivalente a ¾? ¿Puedes verificar cuántos octavos hay en un cuarto?*

*-Entonces, ¿podríamos afirmar que por cada cuarto hay dos octavos?*

[17] Las otras dos posibilidades son: tener un factor común distinto de sí mismo, o no tener factor común. A este último caso también se le denomina primos relativos.

*-¿Qué procedimiento matemático nos permite expresar 3/4 como 6/8 si no tuviésemos las cintas? (Se espera que los y las estudiantes sean capaces de reconocer que se puede multiplicar numerador y denominador por 2 o amplificar por 2)*

De ser necesario, se repite el proceso con otras equivalencias hasta que se asimile el sentido de la amplificación como un procedimiento surgido en el contexto de una estrategia de búsqueda de una común medida. Es importante potenciar las diferencias de opinión que pudieran producirse en torno a la amplificación/ simplificación para generar debate, e instancias de validación de dicha técnica y de sus significado. Por otra parte, como procedimiento interesa comprender que es una abreviación del método de comparar las longitudes de las fracciones a sumar con las reglas graduadas en distintas medidas hasta dar con un referente común.

Es importante que el o la docente elija en primer lugar sólo fracciones cuyos denominadores son uno múltiplo del otro para facilitar la inducción de la posibilidad de amplificar para encontrar fracciones con una común medida, puesto que en este caso basta con buscar la familia de una de las fracciones para encontrar la fracción buscada.

**Ficha 4**

Expresa la suma de las siguientes medidas.

| Medidas | |
|---|---|
| 1) | $\frac{1}{2}+\frac{2}{6}$ |
| 2) | $\frac{2}{15}+\frac{1}{5}$ |
| 3) | $\frac{4}{3}+\frac{2}{9}$ |
| 4) | $\frac{1}{4}+\frac{5}{12}$ |

**Ilustración 18**

A continuación se entrega a las y los estudiantes la **ficha 4** (ilustración 18) que plantea sumas de fracciones cuyos denominadores son uno múltiplo del otro, incluyendo entre los sumandos fracciones no unitarias. Al término del desarrollo de la ficha se realiza una puesta en común en la que la o el docente le pide a diversos estudiantes que expliquen cuál es el procedimiento que les permitió expresar las medidas utilizando un solo referente (formulación). Se propicia un debate en torno a por qué ese procedimiento funciona (validación).

En este momento, se realiza un **cierre de la clase** sistematizando el procedimiento construido para sumar fracciones. Se espera que los y las estudiantes señalen que para expresar la suma como una sola fracción, es posible utilizar la estrategia de buscar -mediante la técnica de la amplificación o simplificación- la familia de fracciones de uno de los sumandos para expresar ambos sumandos con el mismo referente o unidad de medida (institucionalización).

## Quinta sesión

El propósito de la **quinta sesión** es que los estudiantes profundicen en los fundamentos que sustentan el procedimiento construido en la sesión anterior (validación), y lo generalicen, utilizándolo para sumar fracciones cuyos denominadores se relacionan de diversos modos (institucionalización).

**Ficha 5**

Expresa la suma de las siguientes medidas.

| Medidas | |
|---|---|
| 1) | $\frac{1}{4}+\frac{2}{6}$ |
| 2) | $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}$ |
| 3) | $\frac{3}{8}+\frac{2}{6}$ |
| 4) | $\frac{1}{4}+\frac{3}{5}$ |
| 5) | $\frac{1}{4}+\frac{3}{16}$ |
| 6) | $\frac{2}{25}+\frac{1}{5}$ |

**Ilustración 19**

La sesión comienza problematizando a los estudiantes al pedirles que resuelvan (ficha 5, ilustración 19) sumas de fracciones cuyos denominadores son uno múltiplo del otro, tienen un factor común o son primos entre sí. Se espera que los estudiantes resuelvan las del primer caso y se conflictúen con los otros, que exploren buscando fracciones equivalentes a uno de los sumandos, y que al ver que no logran igualar los referentes, prueben buscando fracciones equivalentes al otro sumando. Mediante la observación, es posible que logren darse cuenta que en ambas "familias de fracciones"[18] se encuentran fracciones que utilizan el mismo referente y que decidan reemplazar ambos sumandos por sus respectivas fracciones equivalentes con igual denominador (acción). Es decir, esperamos que chicos y chicas sean capaces de extrapolar el trabajo realizado en la clase anterior y se den cuenta de

[18] En chile, se les llama "familia de fracciones" al conjunto de fracciones equivalentes entre sí.

que pueden utilizar la técnica de amplificar, esta vez buscando las fracciones equivalentes a ambas fracciones, para encontrar un referente común.

Si después de dar tiempo suficiente para resolver los ejercicios (10 minutos), se observa que los estudiantes sólo resuelven aquellas operaciones en las que los denominadores de las fracciones son uno múltiplo del otro, y no surge la extensión del procedimiento como respuesta al desafío se podría presentar un caso extraído de la tabla:

*-Recordemos un ejemplo similar de un par de sesiones atrás. En esa ocasión, establecimos que*

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\,de\ yuan = \frac{5}{12}\ \ de\ yuan$$

*-¿Qué procedimiento matemático nos permitiría expresar 1/4 y 1/6 utilizando doceavos como referente?*

Es probable que algunos estudiantes se den cuenta que pueden expresar las fracciones como doceavos directamente si amplifican por 3 y por 2 respectivamente (y que no es necesario escribir la familia). Si alguien no lo entiende es importante darle tiempo para que establezca la relación. Sólo en caso de no ser así, la o el docente puede realizar preguntas específicas que la induzcan, como por ejemplo ¿cuántos doceavos hay en un cuarto?

Entonces se puede preguntar al curso:

*-¿Cómo habríamos podido calcular la suma si no supiésemos de antemano que se podía expresar en doceavos?*

El propósito es que los y las estudiantes reparen en que pueden buscar la familia de ambas fracciones y seleccionar de cada una aquella que está expresada en una misma unidad de medida (en este caso doceavos, veinticuatroavos, etc).

Una vez que los y las estudiantes han visualizado que pueden amplificar ambas fracciones, se les insta a utilizar dicho procedimiento para resolver los cálculos planteados en la ficha 5.

Al término del desarrollo de la ficha se realiza una puesta en común. El o la docente le pide sucesivamente a tres estudiantes que relaten detalladamente qué hicieron para sumar una fracción determinada cada uno, teniendo cuidado en incluir los tres tipos de relaciones entre los denominadores (uno múltiplo del otro, primos relativos, y con un factor común).

En el primer caso se busca relevar el hecho de que es necesario amplificar ambos sumandos para encontrar una común medida. En el segundo, busca establecer que la medida común es el producto de los referentes de cada uno de los sumandos. El tercer ítem permite verificar que el algoritmo construido es válido para todos los casos incluyendo fracciones no unitarias.

Al término de la sesión la o el docente pregunta a los y las estudiantes ¿por qué esta técnica funciona para cualquier par de sumandos? (validación). Luego les pide que en conjunto redacten el procedimiento construido de manera tal que cualquier compañero de curso –haya o no participado en la actividad- pudiese entenderlo (institucionalización). Se espera que los y las estudiantes señalen que mediante la técnica de amplificar o simplificar una o ambas fracciones, buscan fracciones iguales a las originales con un referente o unidad de medida en común. La relación con los algoritmos previos variará según el o los algoritmos aprendidos inicialmente, pero en todos los casos se busca igualar los denominadores para expresar las fracciones a sumar o a restar como otras iguales que utilizan una unidad de medida o referente en común.

## 4.3 Fase de experimentación

La secuencia didáctica se trabajó mediante cinco sesiones en una situación experimental con un grupo de nueve estudiantes de 6° año básico de un colegio municipal (público) cuyas edades fluctúan entre los 11-12 años de edad. Seis de los nueve estudiantes fueron seleccionados de entre quienes participaron en la entrevista inicial, teniendo cuidado de elegir a quienes habían experimentado dificultades para operar aditivamente con fracciones. Otros tres fueron escogidos al azar, con la ayuda de la profesora de matemática, teniendo como único requisito que no fuesen los estudiantes aventajados del curso. Las tres primeras sesiones contaron con la participación de los nueve niños y niñas, las dos últimas de sólo seis, puesto que los otros tres no habían asistido al colegio ese día. Su participación fue voluntaria y no tuvo retribución alguna.

Las sesiones se realizaron en la semana que va del 4 al 8 de octubre del presente año horario escolar, en una sala facilitada por el establecimiento para tal propósito. La primera sesión fue de aproximadamente 90 minutos, las cuatro restantes duraron alrededor de 70 minutos[19].

Cada estudiante recibió los materiales necesarios para trabajar en la secuencia. Cuando debieron trabajar en grupo lo hicieron en grupos de a tres. En cada sesión los y las estudiantes se enfrentaron a las actividades diseñadas sin recibir indicaciones adicionales. Es decir, ellos no sabían cuál era el propósito de cada sesión ni de la secuencia completa, sino sólo de las tareas solicitadas.

El registro de las sesiones se hizo a través de videograbación, y se recogieron las cuatro fichas de trabajo que contemplaba el conjunto de las sesiones.

Todos ellos ya habían visto la adición de fracciones en el contexto escolar.[20]

La profesora de matemáticas corroboró la información recabada inicialmente en las entrevistas realizadas a los estudiantes del curso durante el mes de agosto del 2010, respecto al algoritmo enseñado para la suma y resta de fracciones.

El algoritmo que ellos habían estudiado se basaba en la búsqueda del mínimo común múltiplo, cuyo foco está puesto en los denominadores de las fracciones. Por ejemplo, para sumar $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ realizan los siguientes pasos:

1° Escribir los múltiplos ordenados de cada denominador y encerrar aquellos que son iguales.
2° Anotar el lugar que ocupa en la serie cada número seleccionado sobre la fracción respectiva (por ejemplo, como el primer 6 está en el segundo lugar, se anota un 2 sobre $\frac{1}{3}$; y como el segundo 6 está en el primer lugar, se anota un 1 sobre el $\frac{1}{6}$ )

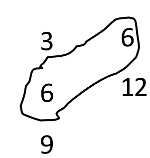


Ilustración 20

3° Amplificar cada fracción para igualar denominadores, y sumar o restar.

[19] Las clases en Chile suelen tener una duración de dos horas pedagógicas consecutivas de 45 min. cada una.

[20] El currículum chileno contempla el estudio de dicho tema en quinto año básico, sin embargo, ellos lo habían visto a principios del presente año en sexto año básico.

## 4.4 Fase de validación

La validación de una ingeniería didáctica se realiza a través de la confrontación de las hipótesis planteadas en el análisis a priori y el análisis de resultados de la fase experimental (análisis a posteriori)

Con el apoyo del registro videográfico, analizaremos cada una de las cinco sesiones realizadas identificado los momentos de acción, de formulación, de validación y de institucionalización, y contrastando las hipótesis planteadas respecto a los objetivos a lograr en cada sesión.

Para transcribir fragmentos de los diálogos se usarán la siguiente nomenclatura:

- E1, E2, …: para denominara a los estudiantes. Cada estudiante tendrá siempre un mismo número.
- GE: Grupo de estudiantes, implica que la respuesta es grupal (en ocasiones no es posible distinguir a cada uno de quienes responden)
- P: Profesora investigadora

**Primera sesión**

En esta sesión, los estudiantes se enfrentaron a la primera tarea grupal de "medir" las cintas de cartulina blanca pegadas en la pizarra, utilizando para ello trozos de cinta de cartulina de colores.

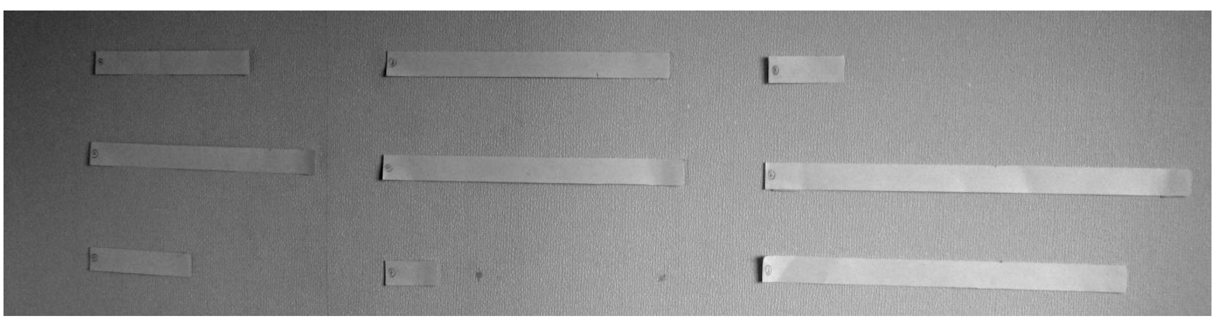


**Ilustración 21**

Cada grupo recibió los siguientes materiales:

- Un set con una cinta cuya longitud es una unidad de medida arbitraria (1 yuan)
- Varios trozos de diferentes colores y tamaños que representan fracciones unitarias del yuan Cada trozo con una medida determinada está asociado a un color (el mismo para cada set).

- El detalle de los trozos de cinta es el siguiente[21]: un trozo de $\frac{1}{2}$, dos de $\frac{1}{3}$, tres de $\frac{1}{4}$, tres de $\frac{1}{5}$, cuatro de $\frac{1}{6}$, cinco de $\frac{1}{8}$, seis de $\frac{1}{10}$, siete de $\frac{1}{12}$, y ocho de $\frac{1}{15}$. El criterio utilizado para la cantidad de trozos a repartir fue que pudiesen establecer equivalencias entre los trozos y que no pudiesen formar el entero con ellos. Es decir, que pudiesen formar más de un medio, pero menos de una unidad.
- 10 micas transparentes que miden 1 yuan
- 1 plumón permanente (para poder escribir en ellas).

La clase se inicia cuando, después de haber repartido los materiales, la profesora plantea cómo es posible medir las cintas que están en la pared.

Los estudiantes inician el trabajo sin saber que los trozos representan fracciones de yuan. La primera actividad corresponde netamente a una situación de acción, en la que los y las estudiantes requieren experimentar y descubrir el conocimiento. En general actuaron siguiendo las indicaciones iniciales y apoyándose en el docente para aclarar situaciones relativas al contrato didáctico: hicieron preguntas del tipo, ¿se pueden usar tres trozos?, ¿se puede usar el trozo grande? (se refieren al yuan).

**Ilustración 22**

Para componer la medida de las cintas, pusieron los trozos de colores con cinta adhesiva bajo cada cinta blanca.

El primer conflicto que se les presentó fue determinar qué trozos lograban componer exactamente la medida de la cinta blanca, en general lo resolvieron por ensayo y error atendiendo al tamaño de cada uno de los trozos, las situaciones de comunicación que se produjeron fueron del tipo:

*E1: "con este me sobra, necesito uno más chico"*
*E2: "entonces lleva el rosado que es más pequeño"*

Otra estrategia fue variar la cantidad de trozos utilizados en la composición.

El segundo conflicto se presentó cuando pasaron a la pizarra a verificar que los trozos elegidos compusieran exactamente la medida.

*P: Estos trozos,* (señala una cinta específica) *¿coinciden con la medida?*
*E6: (pasa adelante y observa desde cerca) No.*
*P: ¿Por qué?*
*E6: Está sobrepuesto*

[21] La medida de las cintas no está marcada, pues es parte de lo que deben concluir a través de la secuencia.

*Los demás manifiestan estar de acuerdo con la afirmación que hizo E6.*

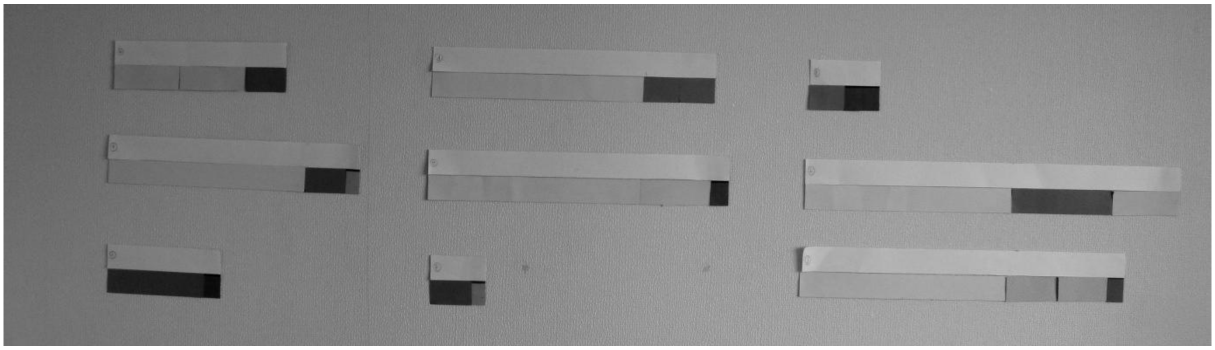


**Ilustración 23**

Esta parte de la actividad fue diseñada como antecedente de la posterior en la que se problematizará a los estudiantes preguntándoles por la cuantificación de cada una de estas medidas. Por lo tanto no se hace necesaria la validación ni institucionalización de conocimientos, puesto que para el nivel cognitivo de los estudiantes la composición de los trozos de cinta con otros menores no representan mayores desafíos que los descritos.

En ese momento se da inicio a la segunda parte de la primera sesión, cuando la profesora pregunta:

> *P: y si nosotros quisiéramos expresar cuánto mide esto* (muestra una de las cintas) *¿Cómo podríamos expresar cuánto mide esta cinta?.*

La respuesta es la esperada: utilizar los colores como referencia y darse cuenta de que no tienen cómo cuantificar.

> *E2: Un yuan y….*
> *E4: Un yuan y un rosado…* (se refiere al color sandía)

No han cuantificado la medida. La profesora insiste:

*P: Pero si lo quisiéramos cuantificar, si quisiéramos decir la cantidad…*
*P: ¿Sabemos cuánto es esto?* (muestra un trozo que corresponde a 1/5 de yuan en la cinta compuesta por un yuan 1/5 y 1/15)
*E2: ¿¼?* (lanza una respuesta "al aire", lo dice dubitativo… los demás observan)
Cuando E2 formula su respuesta, surge la fracción como herramienta de cuantificación de una cantidad no entera, en este caso representada por un trozo de yuan. Los demás no cuestionan ni corroboran la afirmación de E2.

> *P: ¿Cómo lo podríamos averiguar?*

*GE: con una huincha[22] de medir, sí, con una huincha de medir.*
*P: Pero no tenemos huincha de medir… sólo tenemos el material que tienen ustedes en la mesa.*

Parte de las condiciones de esta actividad era tener material concreto disponible, además de los trozos de cintas, los y las estudiantes cuentan con las micas transparentes y los plumones.
Para poder llegar a cuantificar la medida de las cintas es necesario cuantificar la medida de los trozos que la componen, la profesora acota aún más la tarea preguntándoles por la medida de uno de los trozos:

*P: ¿Cómo podríamos averiguar por ejemplo, cuánto es uno de estos verdes?* (señala un trozo)

Se quedan pensando, la profesora repite la pregunta y les indica que si necesitan más material porque se les acabó algún color ocupándolo en la pizarra, tiene más trozos en un sobre (cada grupo ha utilizado muchos de sus trozos para componer las cantidades que están en la pizarra, y es probable que les falte algún tipo de trozo)

*P: Recuerden que los rosados son un yuan y que las micas también miden un yuan* (hace la acción de superponer la mica con el trozo correspondiente a un yuan frente a los estudiantes)

Un estudiante necesita precisar las reglas del contrato didáctico:

*E2: ¿se pueden doblar?*
*P: no, no se pueden doblar*

En ese momento los y las estudiantes se vuelcan nuevamente a experimentar con el material que tienen disponible para resolver el problema de la cuantificación de los trozos. Es decir, vivencian una fase de acción que posteriormente les permitirá formular una respuesta al problema:

*E6: El verde es un medio*
*P: ¿Por qué es un medio?*
*E6: porque es la mitad de un yuan*

La profesora le pide a la estudiante que busquen una manera de probar a sus compañeros que efectivamente corresponde a un medio:

*P: ¿Y cómo puedes comprobar que es la mitad?*

Se demoran poco tiempo en descubrirlo. Dos grupos descubren simultáneamente una forma de probarlo

**Ilustración 24**

[22] Una huincha de medir es una cinta graduada que se utiliza para medir longitudes.

(validación):

Mientras E6 enfrenta el desafío, E2 llama a la profesora y le muestra cómo averiguó la medida del trozo: con la ayuda de sus compañeros de grupo, toma el trozo, marca con el dedo la medida en la cinta rosada que representa un yuan y lo traslada verificando que al repetirlo dos veces completa el entero.

Los demás lo observan, E6 señala que lo hizo de manera diferente, mostrando que con el plumón marcó la medida en la mica transparente. La profesora contrasta ambos procedimientos frente al grupo.

Los y las estudiantes escuchan con atención ambos procedimientos y validan la formulación de sus compañeros señalando que es lo mismo.

> *E3: Es lo mismo que hizo él (se refiere a E2), … repitió dos veces el verde.*
> *P: Es lo mismo, sólo que (ella) lo hizo en la mica, ¿cierto?*

La profesora muestra la mica graduada en medios y conduce una reflexión acerca de la herramienta construida. Hasta entonces, como resultado del procedimiento que les permitió cuantificar la medida de un trozo, un grupo de estudiantes construyó una especie de regla, pero no la han conceptualizado como tal:

> *P: ¿A qué se parece esto?*
> *GE: A una regla*
> *P: A una regla ¿no es cierto?*[23] *¿Pero en cuanto está medida esta regla?*
> *GE: En dos partes*
> *P: ¿Y cuánto mide cada parte?*
> *GE: un medio (algunos) … la mitad de un yuan (otros)*

Los y las estudiantes asienten para dar cuenta que están de acuerdo en que el trozo verde corresponde a una mitad de un yuan. El grupo que hizo la regla en la mica, ha escrito ½ en cada parte.

[23] En Chile es común usar el modismo "¿no es cierto?" para buscar la corroboración de una afirmación.

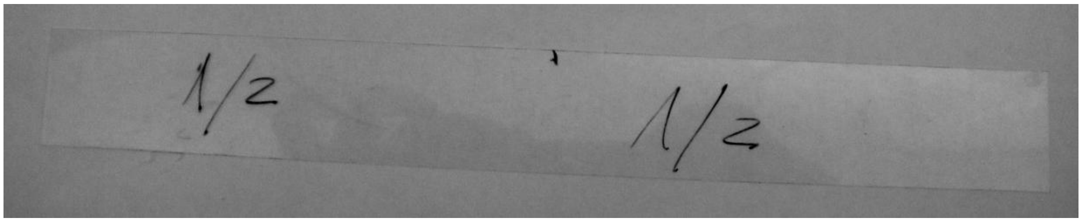



**Ilustración 25**

Los otros grupos construyen sus propias reglas de modo similar, pero escriben ½ sobre la línea que gradúa.

Lo que inicialmente fue una acción, se transforma en validación, ya que los y las estudiantes validan que efectivamente el trozo verde corresponde a medio yuan utilizando el procedimiento mostrado por sus

Una vez que todos han construido sus reglas de medios, la profesora pregunta:

> *P: ¿Estamos de acuerdo en que el verde oscuro, representa medio yuan?*
> *GE: (en coro) Siiií…*
> *P: ¿Podrían escribirlo entonces sobre el trozo que está en la pared?* (muestra el trozo que dio inicio a esta parte de la actividad)

Un estudiante pasa a escribir ½ sobre el trozo verde oscuro que está en la pared. Y la profesora escribe en la pizarra: "verde oscuro: ½"

En este momento se ha institucionalizado que un trozo verde corresponde a medio yuan, recordemos que en las situaciones de institucionalización "se intenta que el conjunto de alumnos de una clase asuma la significación de un saber elaborado por ellos" (Gálvez, 1994, p. 44)

El resto de los y las estudiantes de los grupos han continuado experimentando a través de la manipulación del material. Surgen varias situaciones simultáneas:

> *E1: Un celeste es la mitad de medio yuan* (ha puesto consecutivamente dos trozos celestes sobre un trozo de un medio y comprobado que calzan en forma exacta).
> *P. ¿Cuánto es un celeste entonces?*
> *GE: Un celeste es la mitad de un yuan (repiten a coro)*
> *E2: (dirigiéndose a E1) cuatro celestes son un yuan.*
> *E3: los celestes son un cuarto de yuan.*
> *El estudiante E1 está entusiasmado buscando equivalencias:*
> *E1: Mire! éste es la mitad de la mitad del medio yuan…*

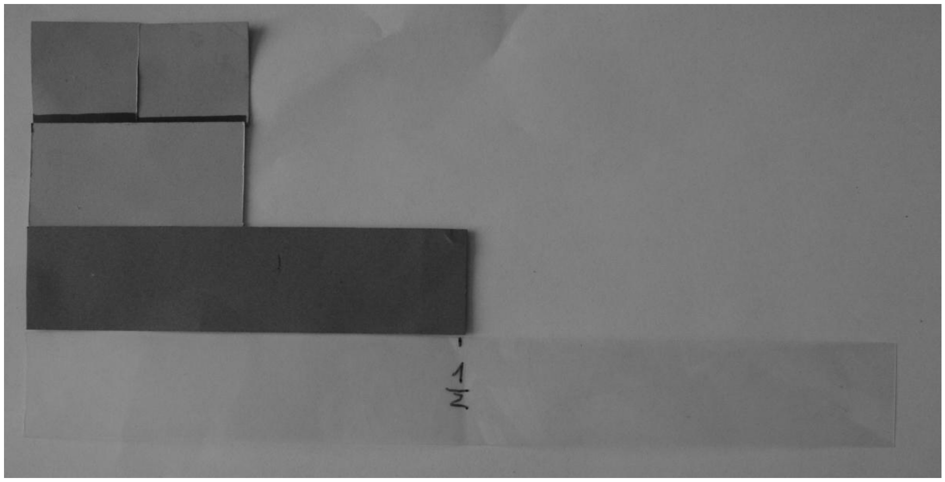


**Ilustración 26**

Paralelamente, E2 ha pedido más trozos color piel a la profesora y poniendo tres trozos consecutivos descubre que corresponde a un tercio

> *E2: Tía mire, este es un tercio*
> *P: ¿cómo lo supiste?*
> *E2: Porque con tres trozos completo un yuan.*

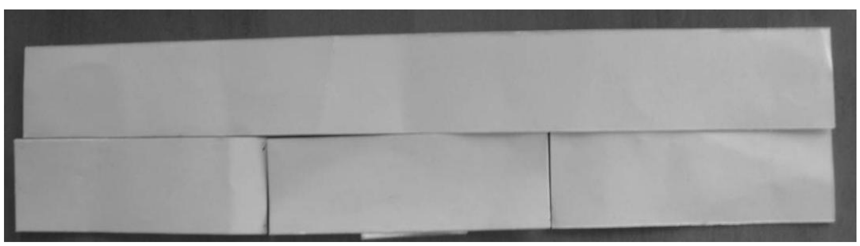


**Ilustración 27**

En este nuevo momento de acción han surgido dos nuevas estrategias. Primera, establecer relaciones de igualdad entre las fracciones (dos celestes son medio yuan) y sacar deducciones de este tipo a partir de dicha relación: si dos verde oscuro son un yuan y dos celestes son un verde oscuro, entonces cuatro celestes son un yuan, por lo tanto, un celeste es un cuarto de yuan.

Segunda, componer el todo "yuan" con tantos trozos de partes alícuotas como fuese necesario. Como la intención era que los estudiantes relacionaran la fracción con su significado como medida (dado que el significado parte-todo no favorece la comprensión de la adición de fracciones), en este momento la profesora comenzó a controlar la variable de comando número de trozos de un mismo tipo disponibles para propiciar la utilización de la estrategia de repetir el trozo n veces hasta formar la unidad.

De manera que los y las estudiantes continuaron trabajando averiguando el significado de los trozos usando la estrategia de repetir el trozo en la mica o de repetir el trozo en otro trozo (acción). Cuando averiguaban el valor de un cierto tipo de trozo (formulación), lo contrastaban con los formulados en los otros grupos (validación) y luego lo anotaban en los del color correspondiente que estaban pegados en las cintas de la pared.

Cuando todos los grupos terminaron de construir sus reglas, la profesora guía una sistematización de las ideas surgidas en la clase (institucionalización):

> *P: Cuando nosotros queríamos decir cuánto medía cada una de estas cintas, ¿Podíamos decir cuánto medía?*
> *GE: No*
> *P: ¿Qué tuvimos que hacer para decir cuánto medía una cinta?*
> *E2: tratar de sacar [se refiere a calcular] la medida de los pedacitos*

Se hace evidente que sin las fracciones no se pueden comunicar medidas no enteras, la fracción resuelve el problema

> *P: ¿Cómo lo averiguaron?*
> *GE: Usando las micas*
> *P: ¿Cómo usaron las micas?*
> *E2: Repetimos los pedacitos para ver con cuántas repeticiones se formaba un yuan*

La fracción surge de la acción de comparar una cantidad de magnitud con una unidad: están midiendo.

> *P: ¿Para qué nos sirvieron las fracciones?*
> E2: Para *saber* o decir cuánto median las cintas.
> *P: Si esta cinta hubiese medido un yuan, y esta otra (muestra otra de las que están en la pared) hubiese medido dos yuanes, ¿hubiésemos necesitado ocupar las fracciones?*
> *GE: No*
> *P: Entonces ¿en qué momento de la actividad tuvimos que ocupar las fracciones?*
> *GE: cuando tuvimos que decir cuánto median las cintas que no median yuanes exactos*

En este proceso de institucionalización se explicita la funcionalidad del objeto matemático fracción, la fracción cobra un sentido.

A continuación, a partir de las intervenciones de los estudiantes, se conviene una definición del sentido de las fracciones: "las fracciones nos sirven para expresar cantidades o medidas no enteras".

En la última fase de esta primera sesión se les reparte una ficha grupal para que anoten la medida de cada una de las cintas, puesto que esta información será la base del trabajo de una sesión posterior.

Ficha 1, grupo 1

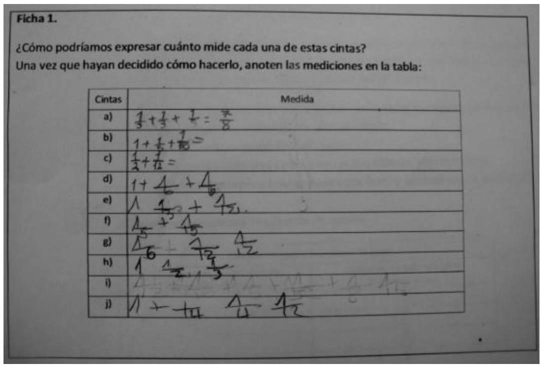



**Ilustración 28**

Ficha 1, grupo 2

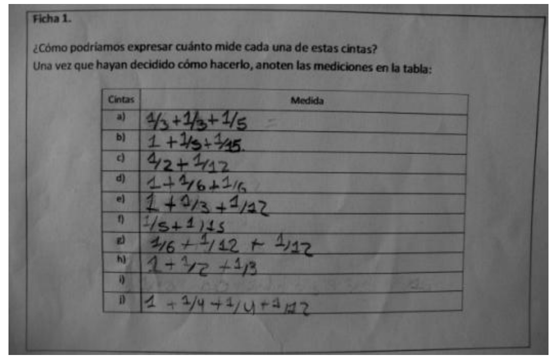



**Ilustración 29**

Ficha 1, grupo 3

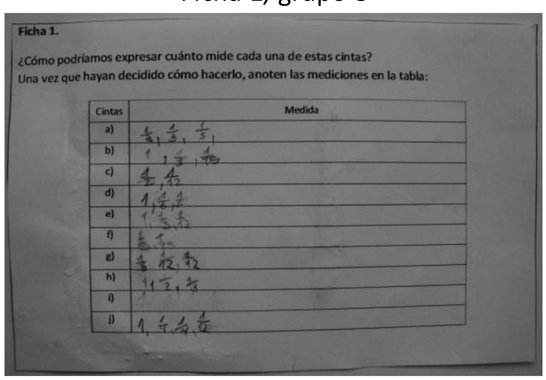



**Ilustración 30**

En conclusión, en esta primera sesión, los y las estudiantes se enfrentaron a dos tareas: componer las cintas con trozos menores, y cuantificar la medida de cada uno de los trozos.

La problematización central era expresar cuánto es la medida. La experiencia de aplicación confirma la hipótesis, es decir, la problematización condujo a los y las estudiantes a que buscasen un procedimiento para cuantificar la medida de un trozo utilizando como unidad de referencia un yuan. Dos estudiantes realizaron el mismo procedimiento: repetir el trozo menor en el trozo mayor, y los demás aplicaron mayoritariamente la misma estrategia.

En esa acción fundamental está implícito el concepto de medida. Para Gairín & Rocher (2002) el medir involucra "*acciones en las que hay que comparar una cierta cantidad de magnitud con la* unidad"(p. 142). Y como pudimos apreciar, los estudiantes compararon una cierta cantidad de magnitud (el trozo menor) con la unidad de referencia (el trozo mayor igual a un yuan). Al momento de expresar dicha medida surge el objeto fracción. Tal como los números naturales emergen cuando se quiere cuantificar una cantidad en el contexto de la actividad de contar, las fracciones surgen como un tipo de número que permite cuantificar el resultado de una medición.

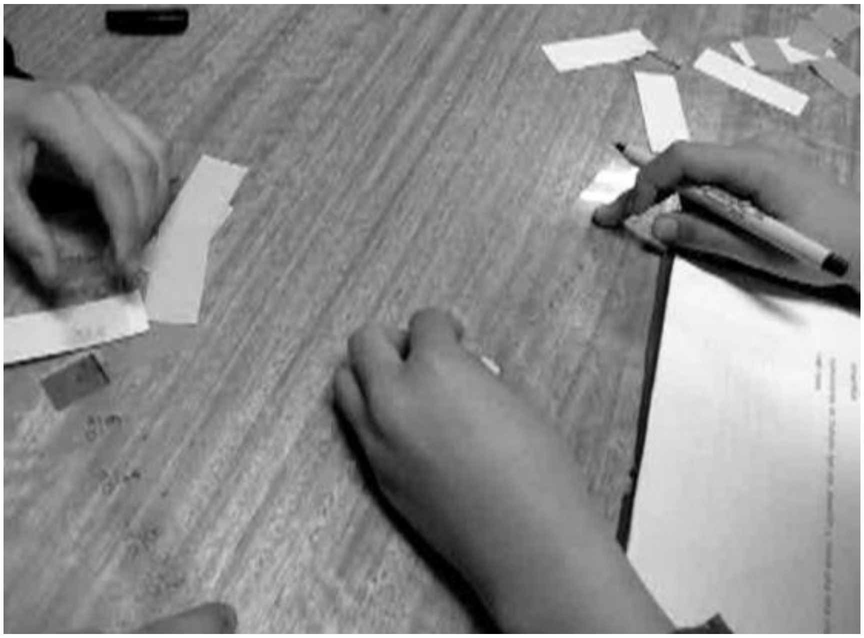


**Ilustración 31**

Además emergieron otras dos estrategias: sacar conclusiones a partir de equivalencias entre los trozos, y poner tantos trozos como fuese necesario hasta completar la unidad de medida.

En el primer caso, al hacer la relación entre los cuartos y los medios, lo que está haciendo el estudiante es medir en dos fases. Primero apreciando que el celeste $\left[\frac{1}{4}\right]$ cabe dos veces en el verde $\left[\frac{1}{2}\right]$ (en ese instante se utiliza el medio como referente), y luego observando que dado que el verde cabe dos veces en el yuan, el celeste cabrá cuatro. De manera que el significado preponderante es el de la fracción como medida.

En el segundo caso, la acción involucrada es la inversa a fraccionar un objeto en partes iguales pues al ver cuántas de las partes componen el todo, está componiendo con partes iguales. Es importante observar aquí que ello fue posible sólo en un momento breve de la actividad porque, como los estudiantes podían pedir más trozos, algunos de ellos pidieron tantos trozos necesitaran para completar el entero. En adelante se controló la variable cantidad de trozos disponibles, y cuando no tuvieron la cantidad total de trozos que les permitían componer el entero, estuvieron obligados utilizar la estrategia inicial. Es decir, si no hubiesen tenido tantos trozos disponibles la situación los habría conducido a utilizar sólo la estrategia inicial. Lo que nos indica que la cantidad de trozos de un mismo tipo disponibles en el set de materiales, es una variable de comando importante de considerar.

Otra variable importante de considerar es la exactitud en la anotación de la medida de cada trozo después de cada iteración, ya que una pequeña diferencia (por ejemplo un milímetro) dificultaba el establecer cuantas veces el trozo formaba la unidad, eso ocurrió sobre todo con los trozos más pequeños. La comparación de las mediciones entre los grupo permitió que constataran y luego corrigieran el error.

A través de esta sesión, los y las estudiantes, en el contexto de resolver la tarea de cuantificar una medida no entera, vivieron situaciones de acción, de formulación y de validación, que permitieron la emergencia y resignificación del concepto de fracción, confirmando la hipótesis inicial.

**Segunda sesión**

En la segunda sesión los y las estudiantes se enfrentaron al desafío de expresar las mediciones de las cintas utilizando un solo referente: una sola fracción de yuan, o bien un yuan y fracción.

> *P: ¿Qué podemos hacer para expresar estas medidas (indica las cintas con sus composiciones mediante trocitos ya cuantificados) como una sola fracción.*

La respuesta (formulación) fue la esperada, como en la sesión anterior cada grupo había construido sus reglas, no fue difícil que se les ocurriera acudir a ellas.

> *E3: Podemos usar las reglas.*
> *E4: sí, eso.*
> *P: ¿Ustedes creen que les servirán?*
> *GE: Sí*
> *P: Vean si se puede*

**Ilustración 32**

Los estudiantes pasan a comprobar que las reglas efectivamente les sirven para expresar las mediciones con un único número, en este caso la fracción. En rigor esta es una situación de acción que simultáneamente les está sirviendo para validar dos ideas: las fracciones sirven para expresar medidas de cantidades no enteras y las reglas graduadas en fracciones son una herramienta útil para resolver el desafío.

Comentan el resultado de su acción (formulación):

> *E9: sí, resulta, este mide 4/15*

*E4: ¿A ver? (pasa adelante con su regla*[24] *graduada en doceavos) No, no sale*
*E9: con otra regla*
*P: anda a buscar otras reglas para que pruebes.*
*E9: vuelve con todas las reglas y comprueba que la que le sirve es la de los quinceavos.*

Para que los estudiantes no se obstaculicen al realizar las mediciones (las cintas están en la pared), se les pide que salga, por turnos, un estudiante por cada grupo. En la pared hay 9 cintas. Cada grupo debe medir tres.

Cuando todos hubieron medido tres cintas, pasan a medir otras tres. A medida que van realizando las mediciones, van registrándolas en una ficha grupal.

En el curso de la actividad se enfrentan a algunos obstáculos:

*E7: ésta no se puede medir con reglas.*
*E8: ¿Por qué?*
*E7: no me resulta ninguna, mira, con ésta casi casi me sale (se refiere a que no logra medir exactamente).*
*E8: Sí, a ellos les salió (se refiere a otro grupo). ¡Mira!, lo que pasa es que aquí esta corrido (se refiere a que las marcas no son regulares) prueba con otra regla de otro grupo.*
*E7: ya (pide una regla con la misma graduación a otro grupo).*
*E7: ahí sí, son 8/12, pero a ellos les salió 7/12…*
*E8: ¿? (se queda pensando)*
*e/: ah! Es que es este de acá (muestra la fracción que está a la izquierda de la línea) y no ésta (la de la derecha)*
*E8: Sí puh..¿viste que resulta?*

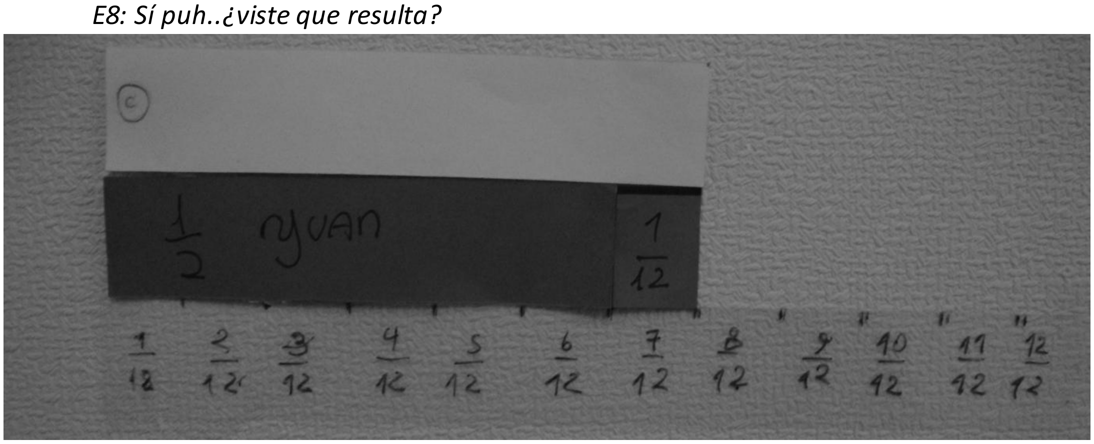



**Ilustración 33**

[24] Las reglas son las micas que miden un yuan y que han sido graduadas por algunos de los estudiantes en el curso de la secuencia para cuantificar los trozos de yuan.

Efectivamente, uno de los grupos no fue minucioso al construir algunas reglas y eso le trajo problemas a la hora de medir las cintas. Por una parte, las líneas que marcan la graduación estaban trazadas con algunos milímetros de diferencia. Por otra, la fracción estaba anotada en el trozo, no en la línea, y eso producía confusión en el sentido de si considerar la fracción escrita a la izquierda o a la derecha de la línea respectiva.

Luego de que todos han terminado de expresar las mediciones con una fracción, se va haciendo una puesta en común para contrastar las expresiones encontradas, a través de esta fase de la actividad los y las estudiantes deberán validar las formulaciones planteadas en sus fichas.

**Ilustración 34**

En la pizarra se han anotado previamente las mediciones compuestas hechas en la sesión anterior. Se anotan los valores obtenidos por cada grupo en  tres columnas consecutivas, y se reflexiona sobre las diferencias.

| Cinta | Grupo 1 | Grupo 2 | Grupo 3 |
|---|---|---|---|
| a) | $\frac{14}{15}$ | $\frac{13}{15}$ | $\frac{7}{8}$ |
| b) | $\frac{19}{15}$ | $1\frac{4}{15}$ | $\frac{19}{15}$ |
| c) | $\frac{7}{12}$ | $\frac{7}{12}$ | $\frac{7}{12}$ |
| d) | $1\frac{4}{12}$ | $\frac{16}{12}$ | $\frac{8}{6}$ |
| e) | $\frac{17}{12}$ | $\frac{17}{12}$ | $\frac{17}{12}$ |
| f) | $\frac{4}{15}$ | $\frac{3}{12}$ | $\frac{4}{15}$ |
| g) | $\frac{4}{12}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{5}{15}$ |
| h) | $1\frac{10}{12}$ | $\frac{22}{12}$ | $\frac{22}{12}$ |
| i) | $\frac{20}{12}$ | $\frac{19}{12}$ | $\frac{19}{12}$ |

**Tabla 2**

Primer caso, cinta a):

*P: ¿Puede pasar alguien del grupo 1 a comprobar su medición?*
*E3: Sí es* $\frac{14}{15}$ .

*P: ¿Puede pasar alguien del grupo 2 a comprobar su medición?*
*E5: Sí es* $\frac{13}{15}$ .

*P: ¿Puede pasar ahora alguien del grupo 3 a corroborar lo que midió?*
*E8: (pasa adelante) No, nos equivocamos porque es un poquito más de* $\frac{7}{8}$

*P: ah!, ¿Y puede una misma cinta medir* $\frac{14}{15}$ *y* $\frac{13}{15}$ *a la vez?*

*GE: No*

Al observar que dos grupos que han expresado la medida con distintas expresiones, corroboran sus mediciones se produce desconcierto en los y las estudiantes.

*P: A ver pasen los dos que pasaron antes y averigüen qué está pasando.*
*E5 y E3: (miden con sus reglas en quinceavos)*
*E5: es* $\frac{13}{15}$ *porque sobran dos quinceavos*

*E3: ¿A ver? (mira con su regla) Sí, sobran dos, pero aquí dice* $\frac{14}{15}$ .

*E5: es lo mismo de antes, te estás fijando en de la derecha y ese no es, es mejor poner la medida debajo de la rayita, mira (le muestra su regla). Pon tu regla aquí (le indica que la pose sobre la cinta).*

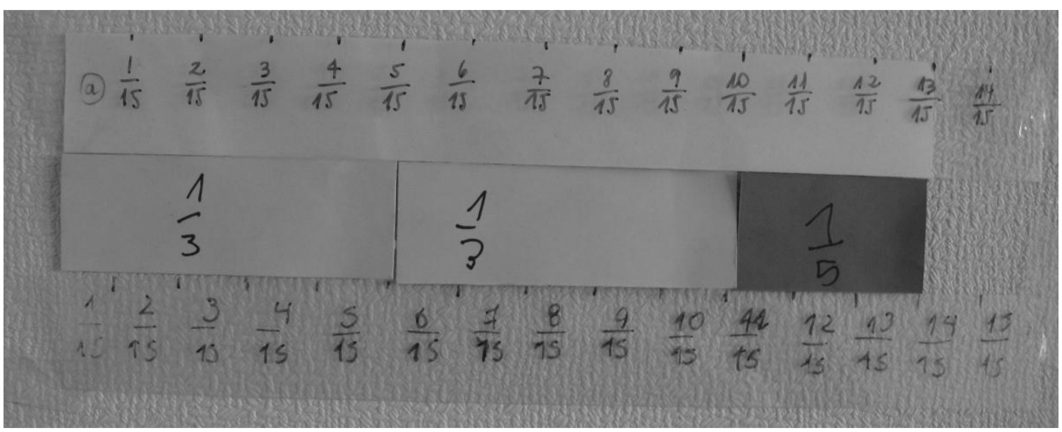



**Ilustración 35**

Poniendo una regla bajo y otra sobre la cinta, observan que efectivamente la línea corresponde a $\frac{13}{15}$.

*E5: Tienes que fijarte en la de la izquierda.*
*E3: sí, es más fácil cuando está la medida debajo de la línea*

En base a las formulaciones que han hecho los grupos se ven obligados a validar sus mediciones.

La forma en que han anotado las fracciones en la regla incide en la medición. Es muy probable que el "error" se deba al notable peso del significado de la fracción como parte-todo. E3 pertenece al grupo en el que pusieron tres trozos de un tercio al construir la regla, y a ello influyó en que hayan anotado las fracciones de ese modo. En cambio, quienes lo hicieron repitiendo el trozo marcaron hasta donde llegaba y generaban la fracción a partir del número de veces que la habían repetido.

<u>Segundo caso, cinta b):</u>

Dos grupos anotaron $\frac{19}{15}$ y un grupo puso $1\ \frac{4}{15}$

> *P: ¿Puede venir alguien del segundo y tercer grupo con sus reglas?*
> *E4 y E9 salen adelante y miden*
> *E4y E9: Es lo mismo señorita (*formulación*)*
> *P: ¿Cómo?*
> *E9: Es que en $\frac{19}{15}$ hay un yuan que son $\frac{15}{15}$ y hay $\frac{4}{15}$ más.*
> *GE: Es verdad.*

Un estudiante del primer grupo pasa a verificar que efectivamente es así, E9 le plantea que si son quinceavos en un yuan hay quince, si son doceavos hay doce y así sucesivamente…

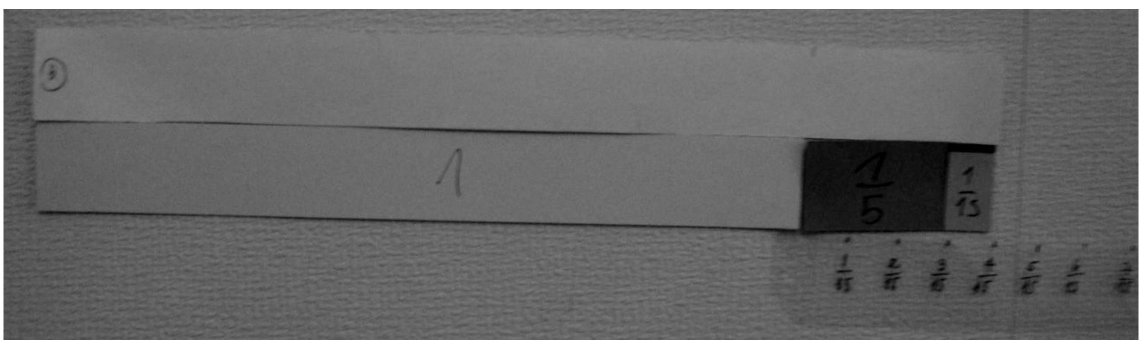



**Ilustración 36**

Con esa explicación está validando $\frac{19}{15}$ y $1\ \frac{4}{15}$ son lo mismo.

En las cintas c) y e) los tres grupos han anotado exactamente la misma medida y no se produce controversia.

Tercer caso, cinta d)

*P: ¿Puede ser que una misma cinta mida* $1\frac{4}{12}$, $\frac{16}{12}$ *y* $\frac{8}{6}$*?*

*GE: No*

*E9: Sí, es lo mismo que vimos recién,* $1\ \frac{4}{12}$ *y* $\frac{16}{12}$ *son lo mismo porque en* $\frac{16}{12}$ *hay* $\frac{12}{12}$ *y* $\frac{4}{12}$*.*

Los demás asienten rápidamente. E9 está formulando una explicación a la diferencia puntual, pero a la vez está generalizando lo descubierto en el caso anterior: cuando la medida es mayor que un entero, se puede expresar con un entero y una fracción o con una sola fracción. Por lo tanto se está produciendo una situación de institucionalización.

*P: De acuerdo, pero, ¿y el* $\frac{8}{6}$ *?*

Sale alguien del grupo 3

*E8: Sí, también mide* $\frac{8}{6}$

*E9: Es que ahí, en* $\frac{8}{6}$ *hay* $\frac{6}{6}$ *y* $\frac{2}{6}$ *más.*

*E4: (dirigiéndose a E8) trae tu regla.*

El estudiante pone una regla por sobre la otra y comprueba que $\frac{2}{6}$ es lo mismo que $\frac{4}{12}$

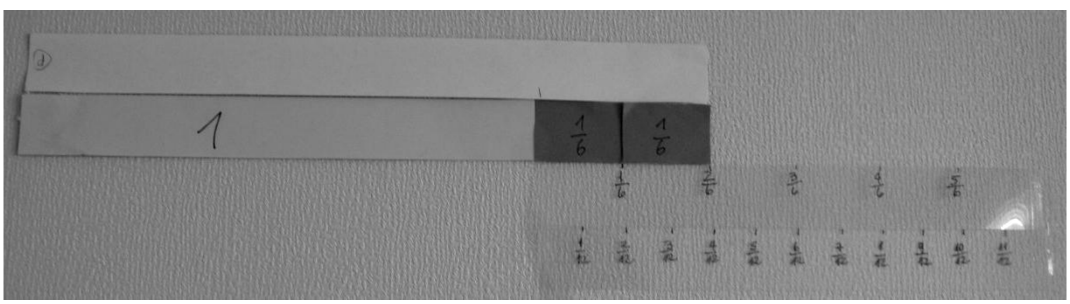



**Ilustración 37**

Esta misma dinámica se genera en la discusión sobre las mediciones de la cinta h). La idea formulada, validada e institucionalizada en las situaciones b) y d), les permite explicar que $1\frac{10}{12}$ es lo mismo que $\frac{22}{12}$.

Cuarto caso, cinta f):

Esta vez, las diferencias en las mediciones, $\frac{4}{15}$ y $\frac{3}{12}$, se explicaron por no haber ubicado la cinta de los doceavos justo al inicio de la cinta blanca, y el estudiante constató rápidamente su error.


**Ilustración 38**

Quinto caso, cinta g):

Para la cinta g) los grupos expresaron la medición con tres fracciones diferentes: $\frac{4}{12}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{5}{15}$ .

> *P: ¿Qué pasó aquí?*
> *E2: No sé*
> *E1: ¡Yo sé!. Un doceavo es la mitad de un sexto, y un sexto es la mitad de un tercio, entonces en un tercio caben cuatro doceavos.*
> *E1 está formulando nuevamente una idea que planteó al inicio. Él es quien jugó a establecer equivalencias cuando estaban cuantificando las piezas.*
> *E7: ¿Cómo?*
> *E1: Mira, compruébalo con tus piezas. ¿Te acuerdas cuando yo estaba jugando con los celestes y vi que dos celestes cabían en un verde?, como en un yuan cabían dos verdes, yo dije que el celeste era un cuarto.*
> *E7: De veras*

E1 está validando el procedimiento de comparar una medida con una segunda y luego la segunda con una tercera, para finalmente comparar la primera con la tercera. En el fondo está la idea de los submúltiplos de una medida.

Algunos asienten pero otros no parecen estar convencidos. Este tema se profundizará en la sesión siguiente.

Por último, en el caso de la cinta i) la dificultad era la misma que la de la cinta inicial (a): la forma de anotar las fracciones en la regla. La diferencia de medición fue planteada por el mismo grupo (grupo 1).

Finalmente la profesora cierra la sesión volviendo a la problemática inicial para sistematizar lo abordado (institucionalización):

> *P: ¿Qué hicieron para poder comunicar las mediciones con una sola expresión?*
> *GE: medimos con las reglas*

Se confirma la hipótesis respecto a que los estudiantes utilizarían las reglas para expresar las medidas compuestas a través de una sola fracción. Al consultarles acerca de las dificultades con las que se encontraron mencionaron aquellas relativas al uso y construcción de la regla:

> *E1: algunas reglas nos confundían, si anotamos la fracción al medio nos confundimos al medir, es mejor ponerlo en la rayita.*
> *E6: También había que poner la rayita exactamente donde llegaba la fracción, porque si no medíamos mal.*
> *E4: Y hay que poner la regla justo al inicio de la cinta…*

La profesora plantea una pregunta para reforzar lo trabajado en la primera sesión respecto del sentido de las fracciones:

> *P: Si las cintas hubiesen medido exactamente un yuan, o si esta cinta (muestra la cinta más larga) hubiese medido dos yuanes exactos, ¿Habríamos necesitado las fracciones para medir?*
> *GE: No*

Por último, se reflexiona en torno a las distintas formas de expresar una medida:

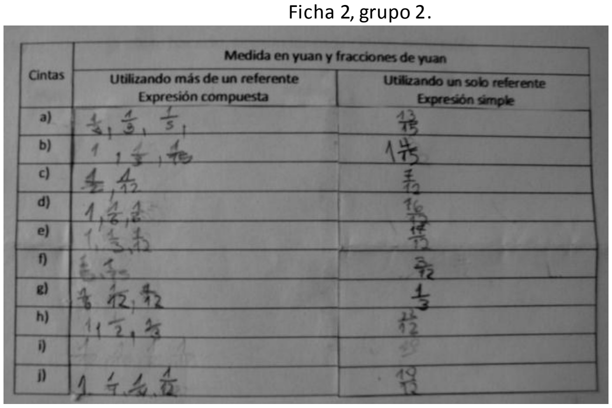
> *P: ¿Existe una sola manera de anotar la medición?*
> *GE: No, había fracciones que eran iguales*
> *P. ¿Cómo cuáles?*
> *E5: $\frac{8}{6}$ era lo mismo que $\frac{16}{12}$*
> *E9: También se podía poner un yuan y la fracción, $\frac{16}{12}$ es lo mismo que $1\frac{4}{12}$.*

Es decir, en este último momento de la sesión, se institucionaliza la idea principal: <u>las medidas compuestas se pueden expresar como una sola fracción</u>, y se sistematizan precisiones relativas al instrumento utilizado para medir (las reglas).

Surge la idea que indica que una cantidad mayor que un entero se puede expresar en forma compuesta por un entero y una fracción, o sólo por una fracción. Y emerge nuevamente la noción de equivalencia o igualdad entre fracciones que permite expresar una misma medida con fracciones iguales que utilizan distinto referente. Como esta última idea rompe con lo aprendido en el marco de los números naturales (distintas expresiones numéricas expresan distintas cantidades), la siguiente sesión está destinada a consolidarla.

A través de esta actividad, los y las estudiantes han sumado fracciones que utilizan distintos referentes sin utilizar el concepto suma, aunque parece estar presente, pues cuando anotaron las mediciones compuestas en la primera sesión, dos de los tres grupos lo hicieron como suma utilizando el signo "+" entre fracción y fracción.

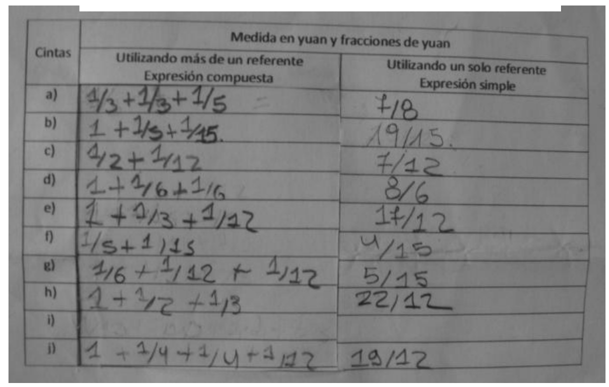
Ficha 2, grupo 2.



| Cintas | Medida en yuan y fracciones de yuan | |
|---|---|---|
| | Utilizando más de un referente<br>Expresión compuesta | Utilizando un solo referente<br>Expresión simple |
| a) | 1/3, 1/3, 1/5, | 13/15 |
| b) | 1, 1/5, 1/15 | 1 4/15 |
| c) | 1/2, 1/12 | 7/12 |
| d) | 1, 1/6, 1/6 | 16/12 |
| e) | 1, 1/3, 1/12 | 17/12 |
| f) | 1/5, 1/15 | 3/12 |
| g) | 1/6, 1/12, 1/12 | 1/3 |
| h) | 1, 1/2, 1/3 | 22/12 |
| i) | [illegible] | [illegible] |
| j) | 1, 1/4, 1/4, 1/12 | 19/12 |

**Ilustración 39**

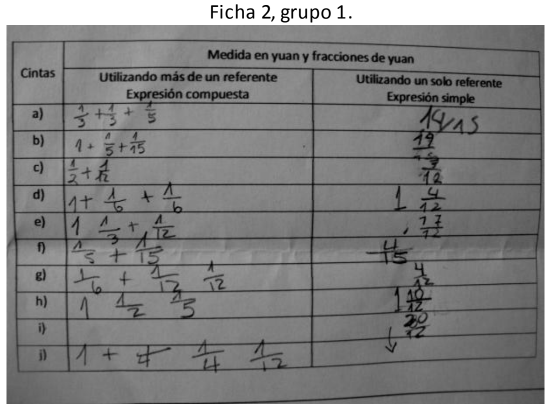
Ficha 2, grupo 3.



| Cintas | Medida en yuan y fracciones de yuan | |
|---|---|---|
| | Utilizando más de un referente<br>Expresión compuesta | Utilizando un solo referente<br>Expresión simple |
| a) | 1/3 + 1/3 + 1/5 | 7/8 |
| b) | 1 + 1/5 + 1/15. | 19/15. |
| c) | 1/2 + 1/12 | 7/12 |
| d) | 1 + 1/6 + 1/6 | 8/6 |
| e) | 1 + 1/3 + 1/12 | 17/12 |
| f) | 1/5 + 1/15 | 4/15 |
| g) | 1/6 + 1/12 + 1/12 | 5/15 |
| h) | 1 + 1/2 + 1/3 | 22/12 |
| i) | | |
| j) | 1 + 1/4 + 1/4 + 1/12 | 19/12 |

**Ilustración 40**

Ficha 2, grupo 1.



| Cintas | Medida en yuan y fracciones de yuan | |
|---|---|---|
| | Utilizando más de un referente<br>Expresión compuesta | Utilizando un solo referente<br>Expresión simple |
| a) | 1/3 + 1/3 + 1/5 | 14/15 |
| b) | 1 + 1/5 + 1/15 | 19/15 |
| c) | 1/2 + 1/12 | 7/12 |
| d) | 1 + 1/6 + 1/6 | 1 4/12 |
| e) | 1 1/3 + 1/12 | 17/12 |
| f) | 1/5 + 1/15 | 4/15 |
| g) | 1/6 + 1/12 1/12 | 4/12 |
| h) | 1 1/2 1/3 | 1 10/12 |
| i) | | 20/12 |
| j) | 1 + ~~4~~ 1/4 1/12 | |

**Ilustración 41**

En síntesis, el propósito de la segunda sesión, que los y las estudiantes expresaran la medida de las cintas con una sola fracción, se logró plenamente. En la fase de acción los y las estudiantes ocuparon sus reglas para medir las cintas y de esa manera lograron formular las medidas con una sola expresión fraccionaria.

A partir de las diferentes expresiones formuladas por cada grupo se condujo un debate en el que los estudiantes debieron validar sus afirmaciones, desechando algunas y adoptando otras. Mediante este proceso los y las estudiantes vivenciaron una situación de institucionalización en la que llegaron a convenir que:

- Una expresión compuesta por varias fracciones se puede expresar como una sola fracción
- Existen expresiones distintas para comunicar una misma cantidad
- Una cantidad es mayor que un entero se puede expresar combinando un entero y una fracción o como una sola fracción

Simultáneamente establecieron algunas precisiones relativas a la construcción y uso del instrumento de medición:

- Las reglas deben ser construidas anotando las líneas que la gradúan con exactitud
- La medida debe ser anotada justo bajo la línea
- Para medir, es necesario alinear el comienzo de la regla con el comienzo de la cinta u objeto a medir

**Tercera sesión:**

Tal como se señaló anteriormente, el objetivo de esta sesión fue profundizar en la noción de igualdad o equivalencia entre fracciones, y que emergiesen la amplificación y simplificación como procedimiento para generar fracciones iguales con distinto referente. Idea base para la posterior construcción de un algoritmo para la suma.

La sesión comenzó retomando, mediante preguntas a los estudiantes, algunas ideas abordadas en las sesiones anteriores.

*P: ¿Para qué nos sirven las fracciones?*
*E7: para medir las cantidades que no son enteras*
*P: En una sesión anterior ustedes establecieron algunas equivalencias que tenemos aquí anotadas. Muestra una pizarra en la que están registradas las siguientes igualdades*

$$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$

De esta manera se utilizaron algunas de las equivalencias establecidas anteriormente por los y las estudiantes para problematizar en torno a los procedimientos que nos podrían permitir generar fracciones iguales. En rigor es una fase de acción en la que se van realizando sucesivas formulaciones:

*P: ¿Qué operación matemática nos permite expresar esta fracción ( $\frac{2}{8}$ ) como esta otra fracción ( $\frac{1}{4}$ ) ?*
*E1: dividimos en dos*
*P: ¿qué es lo que tendríamos que dividir en dos?*
*E7: la fracción*
*P: ¿a qué se refieren con la fracción? (toma dos trozos). Aquí tengo dos octavos (muestra los dos trozos de color verde claro), si los divido en dos (hace la acción de separarlos) me queda un octavo, ¿están de acuerdo?*
*GE: ¡Sí!*

**Ilustración 42**

**Ilustración 43**

*P: ¿me sirve eso para generar la otra fracción?*
*GE: sí*
*P: ¿por qué?*
*E2: porque la mitad de 2 es 1, y la mitad de 8 es 4*
*P: pero si yo divido dos octavos en dos me queda un octavo, no me queda un cuarto…*
*E7: sí es verdad*
*P: ¿sí o no?*
*GE: sí*

Se ha producido un conflicto, pues los y las estudiantes notan que desde lo numérico están realizando una división, pero el significado de esa división no es el usual (repartir).

Una estudiante intenta resolver el conflicto:

*E6: lo simplifica*
*P: ¿qué es simplificar, chiquillos?*
*E7: achicar*
*E6: achicar un número, o sea achicar una fracción*
*P: ¿achico la fracción? ¿Un cuarto es más chico que dos octavos?*
*GE: No*

*P:* (muestra dos octavos bajo un trozo de un cuarto) *¿están de acuerdo en que son lo mismo?*

*GE: Sí*

*P: entonces ¿qué hacemos?*

*E1: achicamos los números con los que escribimos la fracción, dividimos por dos los dos números* (pasa a hacer la simplificación en la pizarra) (formulación)

*P: ¿estamos dividiendo la fracción o estamos dividiendo los números con los cuales expresamos la fracción?*

*GE: los números*

Al problematizarlos en relación con el significado de la simplificación, los y las estudiantes se ven obligados a precisar los alcances del procedimiento. Si bien lo corroboran constantemente con los trozos, no les resulta fácil asimilar que al dividir generan una fracción igual.

Luego analizan la siguiente igualdad (cinco quinceavos es igual a un tercio). E1 está complicado y la verifica poniendo cinco quinceavos junto a un tercio, otra estudiante superpone la regla de los quinceavos con la de los tercios, y el resto comienza a hacer lo mismo con las propias reglas. De esa manera, observan que cinco quinceavos es lo mismo con un tercio y que diez quinceavos es lo mismo que dos tercios. Implícitamente, se está utilizando la noción de fracción como razón.

*P: ¿cuántos quinceavos hay en un tercio?*
*E1: cinco*
*P: ¿y en dos tercios?*
*E1: mmmmh… diez!*

En este momento la profesora pretende que los y las estudiantes relacionen las fracciones naturalmente, no mecánicamente, es decir que de la relación lógica, producto de la comparación observada, se desprenda el algoritmo de amplificación o simplificación para expresar fracciones iguales.

*E6: ah! ya sé señorita, se puede dividir por cinco mire: cinco dividido en cinco, una, y quince dividido en cinco, tres*
*E2: o tres por cinco, quince, y uno por cinco, cinco*
*GE: hacia un lado se multiplica, hacia el otro se divide (formulación)*
*P: ¿estamos dividiendo la fracción?*
*GE: no, los números con los que la escribimos no más*
*E5: y en esa otra se multiplica por tres (se refiere a un tercio igual tres doceavos)*
*P: entonces, ¿se agrandó la fracción?*
*E5: (buscan trozos para verificarlo) No, quedó de igual medida*

Hasta ahora los y las estudiantes han verificado diversas igualdades tanto mediante el uso del material concreto como mediante el trabajo numérico. Un estudiante pregunta cómo se pueden generar fracciones iguales sin haber establecido previamente las igualdades:

> *E1: ¿y cómo podemos hacerlo para encontrar una fracción igual a ésta (se refiere a un tercio) si ésta no está (indica tres doceavos)?*
> *P:¿cómo se podría hacer? En un cuarto caben tres doceavos, pero un cuarto también caben otras fracciones*
> *E4: los octavos*
> *E6: sí porque uno por dos, dos, y cuatro por dos, ocho: dos octavos.*

En este momento se establece la posibilidad de que haya más de dos fracciones iguales entre sí, los y las estudiantes comienzan a jugar generando fracciones mediante amplificación, al principio lo corroboran con el material concreto (validación), pero progresivamente se van desprendiendo de él hasta llegar a institucionalizar la amplificación como técnica o procedimiento válido para generar dos o más fracciones iguales.

> *E6: entonces cuando simplificamos no achicamos la fracción, es como resolverla de otra manera pero en el fondo queda igual*
> *P: exactamente*
> *E3: y cuando amplificamos también queda igual.*

En esta fase de la sesión, la profesora sistematiza las ideas que han surgido:

- Simplificar no es achicar, ni amplificar es agrandar
- Cuando se amplifican o simplifican fracciones, las fracciones se expresan de otra manera pero representan la misma cantidad (no cambian)

Y a continuación les entrega una ficha individual para que trabajen la técnica que han construido. La ficha 3 "buscando la misma fracción" les plantea como desafío buscar cuatro expresiones distintas para expresar las siguientes fracciones: $\frac{1}{2}, \frac{3}{15}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}$.

En general, los estudiantes utilizaron el método de la amplificación para generar las nuevas fracciones, a excepción de la fracción $\frac{3}{15}$ que fue simplificada, y luego amplificada, por tres de los estudiantes. Por otra parte se observó un obstáculo didáctico con las fracciones no unitarias: como anteriormente habíamos trabajado con fracciones unitarias, un estudiante operó aditivamente aumentando el numerador de uno en uno, y el denominador a través de sumas sucesivas. Por ejemplo, cuando buscó la familia[25] de $\frac{1}{3}$, anotó sucesivamente $\frac{1}{3} = \frac{2}{} = \frac{3}{} = \frac{4}{} = \cdots$ en los numeradores y $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \cdots$ en los denominadores, obtienendo la misma familia que al operar multiplicativamente sobre la fracción.

[25] El término "familia" se refiere al conjunto de fracciones equivalentes entre sí

Pero cuando quiso generar la familia de $\frac{3}{15}$ , anotó sucesivamente $\frac{3}{15}=\frac{4}{}=\frac{5}{}=\frac{6}{}\dots$ en los numeradores y $\frac{3}{15}=\frac{4}{30}=\frac{5}{45}=\frac{6}{60}\dots$ en los denominadores, obteniendo fracciones que no son iguales entre sí.

Al cierre de la sesión se realizan preguntas relativas al significado de la técnica de amplificar y simplificar y se reflexiona acerca de la posibilidad de establecer infinitas fracciones iguales a una dada.

> *P: ¿podrían haber escrito más de cuatro fracciones iguales a cada una?*
> *GE: sí.*
> *P: ¿Cuántas podían escribir?*
> *E9: todas las que quisiéramos*
> *E2: son infinitas, depende de cuántas veces amplifiquemos*
> *P: ¿Cuántas veces podemos amplificar?*
> *GE: muchas, infinitas.*
> *P: ¿y simplificar?*
> *E1: depende de los números*
> *E6: se tienen que poder dividir.*

Ficha E5

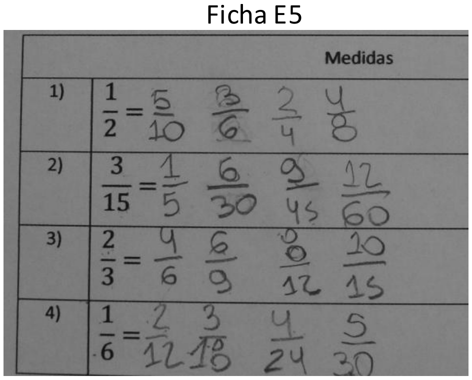



**Ilustración 44**

Ficha E8

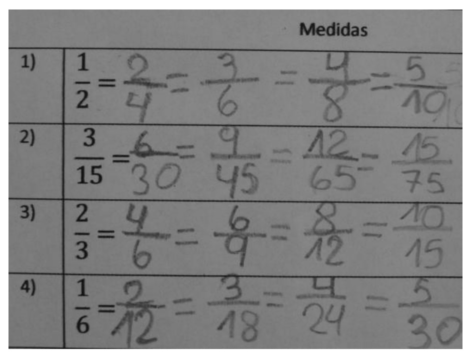



**Ilustración 45**

Ficha E3

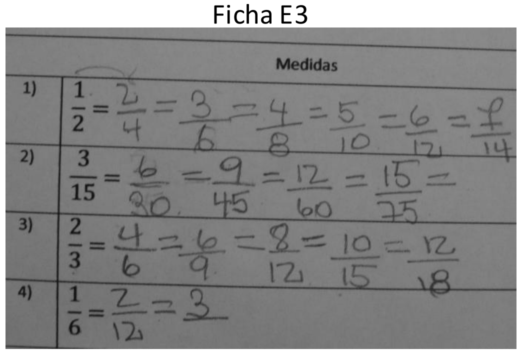



**Ilustración 46**

De manera que en esta sesión, los estudiantes profundizaron la idea que indica que una fracción puede ser igual a otra a pesar de que estén expresadas de distintas maneras.

Exploraron respecto de qué procedimiento podía ser útil para generar fracciones iguales entre sí. Mediante interacciones sucesivas formularon y validaron la técnica de amplificación y simplificación como procedimiento eficaz para generar fracciones iguales o "familias" de fracciones.

Comprendieron que simplificar no es achicar y que es distinto a dividir la fracción. Asimismo, que amplificar no es agrandar, ni es lo mismo que multiplicar la fracción.

A través de esta sesión, se fueron desprendiendo progresivamente del material concreto avanzando hacia una situación de mayor abstracción en el momento de trabajo con la ficha 3.

**Cuarta sesión**

En esta sesión, los y las estudiantes establecieron un procedimiento para sumar fracciones sin material concreto.

La clase comenzó cuando la profesora plantea que en una sesión anterior, cuando midieron las cintas c) y f), que están pegadas en la pizarra, establecieron que:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{15}=\frac{4}{15}$$

Los y las estudiantes pasan a verificar con las reglas fraccionarias que efectivamente las cintas c) y f) compuestas por las fracciones señaladas en la pizarra, miden siete doceavos y cuatro quinceavos respectivamente. A continuación saca las cintas de la pizarra, les pide le entreguen las reglas y les pregunta:

> *P: Si no tenemos las cintas ni las reglas y quiero hacer esa suma, ¿cómo lo podemos hacer?*
> *E1: con el yuan*
> *E2: ¿cómo era? ¿amplificar y simplificar? (como pensando en voz alta)*
> *Se produce un silencio, todos piensan en cómo hacer la suma…*
> *P: Por ejemplo, ¿estamos de acuerdo en que un medio más un doceavo me da siete doceavos?*
> *GE: sí*
> *P: si yo tapo aquí (tapa el primer sumando) ¿Qué fracción podría ir ahí para que sumado con un doceavo nos dé siete doceavos?*
> *P: ¿Qué fracción debería ir aquí para que se cumpla que dicha fracción más un doceavo nos dé siete doceavos?*
> *E1 y E6: ¡seis doceavos! (responden casi simultáneamente)*
> *P: ¿están de acuerdo en que seis doceavos más un doceavos nos da siete doceavos?*
> *GE: ¡Sí!*
> *P:Ok, ¿y qué podemos hacer para expresar un medio como seis doceavos?*

Piensan unos instantes hasta que un estudiante da la respuesta esperada

*E2: amplificar, porque uno por seis me da seis y dos por seis me da doce*
*P: ¿están de acuerdo con el procedimiento de E2?*
*GE: ¡Sí!*

La profesora le pregunta cómo supo que tenía que amplificar por seis y E2 responde que, fue probando, amplificando un medio formando la familia de fracciones iguales hasta que lo descubrió. Les pregunta si pueden usar ese procedimiento en la otra suma y responden que sí

*P: Si yo tapo aquí (tapa el primer sumando) ¿qué fracción podría ir aquí?*
*E6: Tres quinceavos.*
*E2 dice tres más uno, cuatro, quince más quince…Lo interrumpe E6 y dice es que cuando los denominadores son iguales no se suman. La profesora le pregunta por qué.*
*E6: Es que así nos dijeron.*
*E2: Nunca nos dicen por qué.*
*P: Pensemos por qué.*
*E1: porque los dos son quinceavos, y tres quinceavos más un quinceavo son cuatro quinceavos*
*E4: ¡de veras!*
*P: ¿les parece lógico?*
*GE: ¡Sí!*

Los y las estudiantes ya saben cómo pueden resolver sumas sin el apoyo del material concreto. Hasta ahora se habían apoyado en sumas resueltas con el material concreto (reglas) para generar un procedimiento. En ese momento la profesora les plantea una suma cuyo resultado no conocen: $\frac{1}{4}+\frac{5}{12}$ y un estudiante pasa a resolverlo aplicando el procedimiento ya descrito.

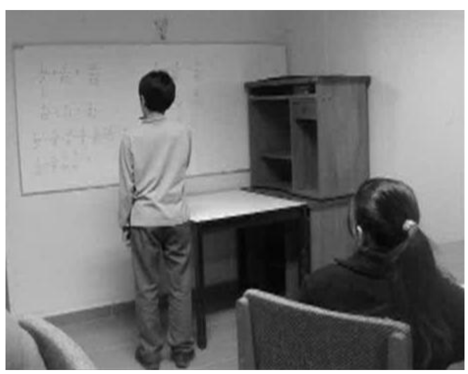


**Ilustración 47**

A continuación, les pregunta si les parece un procedimiento útil y si lo comprenden. Los y las estudiantes señalan que sí. Les entrega la ficha 4 que contiene cuatro sumas para que cada uno valide el procedimiento construido colectivamente.

Resuelven las sumas de la ficha sin mayor dificultad, y luego se realiza una puesta en común del trabajo realizado en la que cada estudiante explica el procedimiento utilizado para resolver las sumas.

Ficha E5

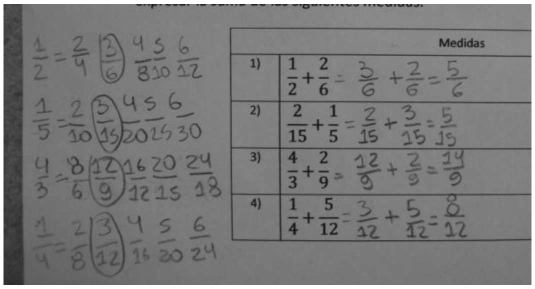


Ilustración 48

Ficha E1

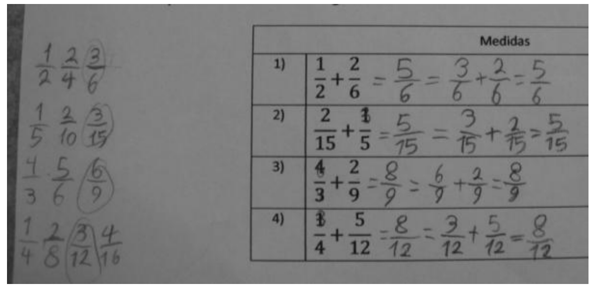


Ilustración 49

Ficha E2

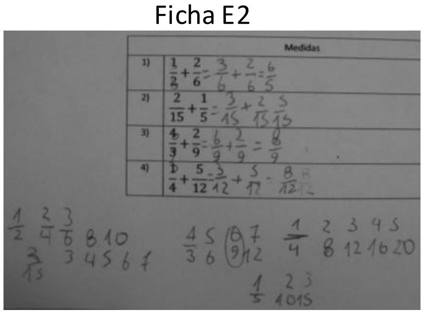


Ilustración 50

Ficha E8

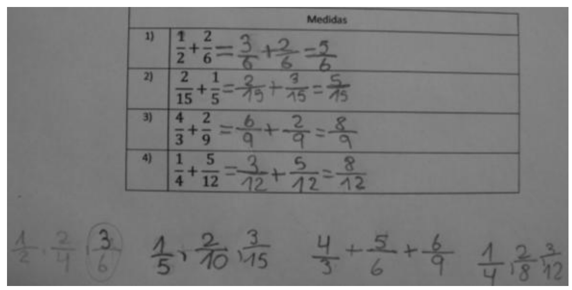


Ilustración 51

Finalmente, se le pidió a cada grupo que describiese el procedimiento construido, pero sólo uno de los grupos logró redactar por escrito lo que pensaban:

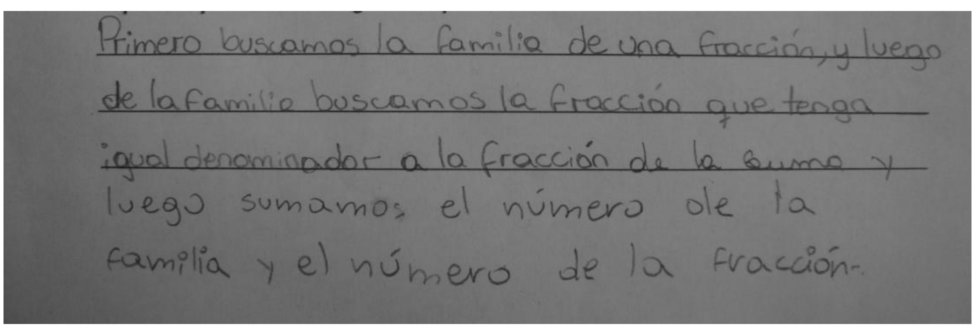



Ilustración 52

En esta fase de la secuencia, los y las estudiantes trabajaron con un mayor grado de abstracción, y utilizaron los conocimientos construidos en las sesiones anteriores para construir un procedimiento para sumar.

**Quinta sesión:**

La sesión comienza cuando la profesora le pide a un estudiante que resuelva en la pizarra la suma $\frac{1}{4}+\frac{5}{12}$ para, a partir de allí, pedirle al grupo en general que expliquen el procedimiento para sumar fracciones que han construido, de manera que cualquier compañero de su curso pudiese entender.

Considerando las dificultades de redacción observadas en la clase anterior, les da la frase inicial "Cuando queremos sumar fracciones que utilizan distintas medidas". La profesora guía el proceso escuchando, contrastando, haciendo preguntas, y cerciorándose de que están todos de acuerdo. A medida que los y las estudiantes van conviniendo ideas, las va anotando en la pizarra.

*E2: podemos buscar la familia de la fracción… (piensa en voz alta) ¿cómo se puede expresar esa fracción, la primera fracción? (se refiere a* $\frac{1}{4}$*)*

*E5: la fracción más chica…*
*E2: ¿más chica, estás segura que es más chica?*
*P: (lo parafrasea) ¿necesariamente es más chica?*
*E6: o sea puede ser chica, pero no necesariamente…*
*E2: pongamos "la familia de cualquier fracción"*
*E6: o de cualquier sumando…*
*P: ¿están de acuerdo en la familia de cualquier sumando?*
*GE: Sí*
*P: ¿qué más, para qué buscan la familia?*
*E5: para que tengan igual denominador*
*E6: para que tengan igual medida*
*P: para que tengan igual denominador dice E2 y para que tengan igual medida dice E6, ¿qué piensan?*
*E2: (piensa en voz alta) Si fuera igual medida estarían…*
*P: ¿éstas quedaron con la misma medida? (indica la suma inicial)*
*E2: si fuera igual medida, medirían lo mismo, y* $\frac{1}{4}$ *o* $\frac{3}{12}$ *no mide lo mismo que* $\frac{5}{12}$
*P: tiene razón E2, pues* $\frac{3}{12}$ *y* $\frac{5}{12}$ *no miden lo mismo…*
*P: pero usan la misma unidad de medida, porque los dos utilizan doceavos, ¿están de acuerdo?*
*GE: Sí*
*E6: ponga allí arriba también (se refiere a la pizarra) unidad de medida.*

La profesora reformula la definición anotada en la pizarra: *cuando queremos sumar fracciones que utilizan distinta ~~medida~~ unidad de medida, podemos buscar la familia de cualquier sumando, para que tengan igual ~~medida~~…*

*P: ¿puede ser denominador o unidad de medida para que queden las dos ideas?*
*GE: Sí*
*E2: esa palabra es nueva, yo no la conocía.*
*P: Sí, casi nunca la usamos con las fracciones, ¿les parece importante usarla con las fracciones?*
*Asienten con la cabeza*
*E6: Ni sabíamos para qué se tenían que igualar los denominadores.*
*P: ¿y ahora lo descubriste?*
*E6: Sí*

Los demás asienten con la cabeza dando cuenta de que también establecieron esa relación.

Durante este proceso, los y las estudiantes institucionalizan el conocimiento. Asumen el significado de un saber elaborado por ellos a través de sucesivas situaciones de acción, formulación y validación vividas tanto en las sesiones precedentes, como durante la construcción misma de esta definición. Es un proceso de establecimiento de una convención matemática, en este caso convienen el siguiente procedimiento para sumar fracciones:

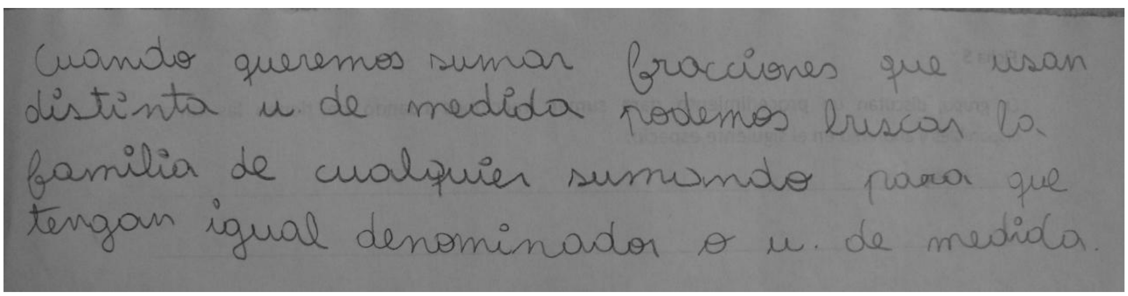

Cuando queremos sumar fracciones que usan distinta u de medida podemos buscar la familia de cualquier sumando para que tengan igual denominador o u. de medida.

**Ilustración 53**

Además se produce una resignificación tanto del concepto como del procedimiento, al comprender la fundamentación de un paso presente en cualquier algoritmo aditivo: la necesidad de igualar los denominadores para sumar fracciones.

A continuación los y las estudiantes son desafiados a resolver una ficha que contienen seis sumas de fracciones. En dos de ellas [ 5) y 6) ] basta con buscar una nueva manera de expresar una de las fracciones para resolver la suma. Las cuatro restantes, plantean una nueva situación, ya que al ser los denominadores primos entre sí, o tener sólo un factor en común, es necesario trabajar con los dos sumandos para buscar una forma común de expresarlas.

El primer conflicto se presenta cuando un estuidiante se da cuenta de que el procedimiento de amplificar la fracción con denominador más pequeño, no le permite solucionar el problema

*E2: Me paso*

*P: ¿Cómo?*

*E2: aquí me paso* (muestra que 8 es mayor que 6)

*P: ¿Y si sigues?*

*E2: [escribe* $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12}$ *] me paso de nuevo*

*P: ¿qué otra cosa puedes hacer?, ya buscaste la familia de un cuarto..*

*E2: puedo probar con la de dos sextos, pero me voy a pasar más*

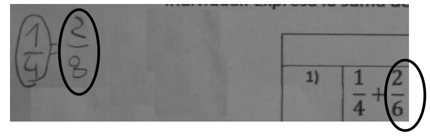


**Ilustración 54**

Deja la suma inconclusa, revisa la ficha y comienza a resolver la suma n° 5.

Tal como se esperaba, los estudiantes resuelven rápidamente los casos ya conocidos, y se problematizan frente a los demás.

Anverso y reverso de la Ficha 5 resuelta por E5

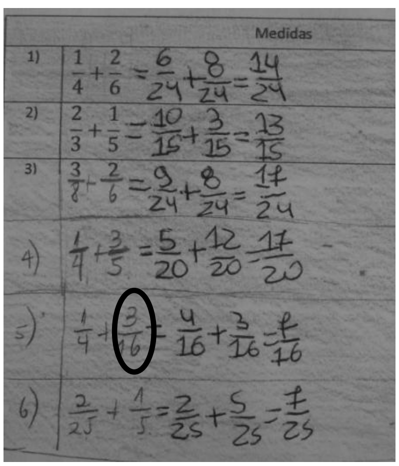


**Ilustración 55**

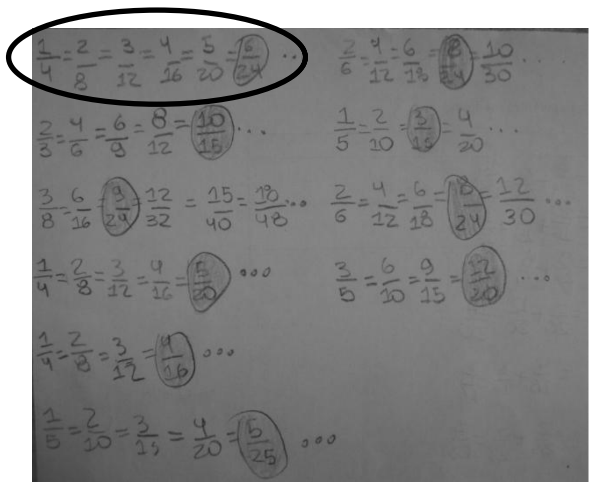


**Ilustración 56**

En general exploraron buscando la familia de fracciones de uno de los sumandos, y al ver que no conseguían expresarla en términos de la otra, prueban buscando la familia de la otra fracción.

En ese momento, se dan cuenta de que en ambas familias hay una expresión que utiliza un mismo referente y amplían el método construido en la sesión anterior.

Anverso y reverso de la Ficha 5 resuelta por E6

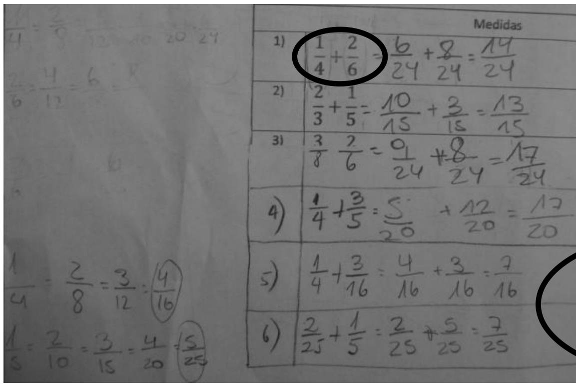


**Ilustración 57**

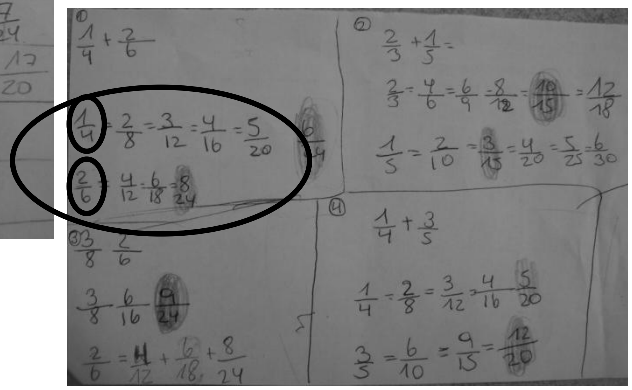


**Ilustración 58**

En la puesta en común, se generaliza el procedimiento. E2 cuenta el conflicto vivenciado inicialmente y señala que después de resolver la 5) y la 6) volvió al primer ejercicio y al desarrollar la familia de la segunda fracción se dio cuenta que en ambas familias habían doceavos.

A partir de diversos relatos, los y las estudiantes amplían la definición construida al inicio, señalando pueden buscar la familia de uno o de varios sumando que tengan el mismo denominador o unidad de medida.

La profesora cierra la secuencia destacando el hecho de que desarrollaron un procedimiento para sumar fracciones comprendiendo qué es lo que hacen en cada fase. Y un estudiante agrega:

*E6: porque antes no sabíamos, antes no sabíamos por qué había que hacer cada paso.*

# 5 Resultados de la experiencia didáctica

Considerando las distintas fases de esta investigación acerca de la resignificación de la operatoria aditiva con fracciones podemos establecer los siguientes resultados:

En cuanto al **uso de la fracción** y a la **funcionalidad del conocimiento**, se logró que las y los estudiantes utilizaran la fracción como un objeto matemático que les fue funcional para cuantificar medidas no enteras, reviviendo la emergencia histórica del concepto. Por otra parte, se logró que la adición surgiese como respuesta natural a un problema de composición, en este caso, la operación permitió (o sirvió para) expresar una medida compuesta como una sola fracción.

En cuanto a la **interpretación del concepto**, se amplió la concepción de fracción como expresión de una parte de un todo, hacia una concepción en la que la fracción expresa "a" veces de una unidad de medida que se ha dividido en "b" subunidades (tres cuartos es tres veces un cuarto). En la construcción de equivalencias se utilizó la noción de razón al establecer si en un tercio hay cinco quinceavos, entonces, en dos tercios hay diez.

En relación con la **comprensión del algoritmo**, se logró que los y las estudiantes comprendiesen cuáles son los pasos necesarios, y en qué orden deben ser realizados para poder obtener el resultado de la adición de fracciones. Para ello fue fundamental la comprensión de asuntos relativos a la naturaleza de la fracción. Específicamente los y las estudiantes comprendieron la noción de equivalencia entre fracciones, rompiendo con la extensión de la relación ya conocida entre los números naturales que indica que si dos números se escriben de manera distinta, expresan cantidades diferentes. Por otra parte comprendieron que era necesario expresar las fracciones en los mismos términos para poder efectuar la suma mediante conteo, este conocimiento les permitió simultáneamente construir y fundamental el algoritmo.

Aún cuando el proceso de **convención matemática**, se presentó en un momento muy acotado de la secuencia, fue fundamental para posibilitar la construcción comprensiva del algoritmo. El objetivo de dicho proceso es lograr una integración sistémica de un conjunto de conocimientos. Surgió específicamente en el momento previo a la formulación del algoritmo, cuando los y las estudiantes deben establecer cuál es el valor conveniente que debe asumir una determinada fracción, para mantener la coherencia de la suma. Es decir, conocido que $\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$ (dado que los y las estudiantes lo han establecido previamente trabajando con el material concreto) los y las estudiantes convienen que el valor de $\frac{1}{2}$ debe ser $\frac{6}{12}$.

De manera que para construir un algoritmo que permita sumar, se partió de la relación inversa: resuelta la suma, establezco un procedimiento para realizar la operación sin tener que recurrir al material concreto. O conocido el destino, establezco un camino alternativo para llegar a él.

En relación con la **resignificación** esta se vivencia en distintos momentos de la secuencia. En las dos primeras sesiones cuando se reconceptualiza a *la fracción* como un objeto que nos sirve para expresar cantidades no enteras. Se produce un desplazamiento del significado parte-todo como referente exclusivo, al descubrir que la fracción tiene un sentido distinto de expresar el número de partes "pintadas" o "consideradas" de un entero dividido en partes iguales. En la tercera sesión se resignifica *la noción de equivalencia*, esta vez la resignificación no implica un cambio de significado, pues una fracción equivalente a otra sigue siendo aquella que expresa una misma cantidad con otros términos. Sino que se resignifica mediante la comprensión profunda de dicho significado para enriquecerlo, problematizando el concepto no sólo a partir de su definición sino de los procedimientos asociados a él. Ello se abordó en esta sesión explorando y problematizando las relaciones equivalencia-igualdad; amplificar-agrandar-multiplicar; simplificar-achicar-dividir. A través de la cuarta y la quinta sesión, se produce la resignificación *del algoritmo*. Tal como señalamos en un párrafo precedente, fue fundamental que los y las estudiantes lograsen establecer que es necesario expresar las fracciones en los mismos términos para poder efectuar la suma mediante conteo, ello explica la necesidad de igualar los denominadores contenida en los diversos algoritmos para sumar fracciones. De manera que no sólo construyeron un algoritmo con fundamentos matemáticos, sino que pudieron establecer relaciones con los procedimientos previamente conocidos, que dotaron de sentido a los diversos pasos que los componen.

# 6 Conclusiones

A través de esta investigación hemos desarrollado uno de los temas que arrastran variadas dificultades de aprendizaje en el sistema escolar: la operatoria aditiva con fracciones. Considerando que la fracción es un objeto matemático que por sus múltiples usos, por los diversos contextos que le dan vida, y por sus variadas interpretaciones se ha transformado en una noción compleja, nos propusimos como desafío responder la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué características debería tener una propuesta didáctica que busque resignificar el algoritmo para operar aditivamente con fracciones promoviendo la comprensión tanto del concepto como del propio algoritmo?

Una propuesta didáctica vive al interior de un sistema didáctico y por lo tanto es preciso considerar la relación entre los distintos actores del sistema: el estudiante, el profesor y el saber.

El saber se hizo presente en el aula en la forma de una situación didáctica construida por el profesor, pero vivida también protagónicamente por el estudiante. El objetivo final de la secuencia era logra la resignificación del algoritmo aditivo por parte de los estudiantes. Para ello, se utilizó como eje articulador la comprensión del concepto para una construcción comprensiva de un procedimiento. A través de la investigación se pudo constatar que son dos aspectos que están íntimamente interrelacionados y que la consecución de uno es un antecedente necesario para la consecución del otro.

Algunos aspectos destacados relativos a la comprensión del concepto que se pudieron establecer a partir de este estudio fueron la comprensión de la fracción como medida, la comprensión de la noción de equivalencia de fracciones, y de los procedimientos para generar fracciones equivalentes.

Una de las primeras dificultades que presentan los estudiantes es con la idea de parte-todo en contextos en que las partes superan al todo. La existencia de fracciones mayores que un entero es un aspecto difícil de explicar, dado que la única funcionalidad conocida hasta el momento de las fracciones es que permiten representar una parte de un todo. Las actividades presentadas en la secuencia permitieron conflictuar estas concepciones iniciales e iniciar el trabajo de una conceptualización más robusta de las fracciones que posibilitaron a las y los estudiantes ampliar el concepto de fracción en tanto objeto que permite expresar cantidades no enteras.

Otra de las dificultades relativas a la naturaleza de la fracción es que hasta antes de enfrentarse a esta secuencia, los y las estudiantes han tenido como gran referente el trabajo con números naturales, lo que les provoca una gran dificultad cuando se desea comprender la fracción como un solo objeto matemático. Los estudiantes suelen ver a la fracción como dos números separados, dándole a cada uno un significado distinto, muy asociados al significado parte-todo: el numerador se relaciona con el número de partes consideradas y el denominador con el número de partes en las que se ha dividido el entero. Por otra parte, para comprender y asimilar la noción de equivalencia entre fracciones, deben romper con la idea construida en el contexto de los números naturales en el sentido de que dos números escritos en forma distinta representan cantidades diferentes. Esta concepción relacionada al trabajo con naturales dificulta la comprensión de que dos fracciones expresadas con distintas cifras puedan ser "iguales" (equivalentes), considerando que una utiliza "números" mayores o menores que la otra. Por último, los procedimientos que permiten generar fracciones equivalentes, también generan contradicciones. Si consideramos además el hecho de que dichas fracciones iguales pueden ser vistas como el producto de la multiplicación o división de numerador y denominador por algún factor o divisor respectivamente, se conflictúa aún más la idea de la igualdad. Esto se relaciona y se explica porque en los números naturales, la multiplicación se asocia a una suma iterada, con lo cual el producto cuando ambos factores son distintos de uno, siempre es una cantidad mayor a cada uno de los factores por separado. Asimismo, la división se asocia con una resta iterada, de manera que el cociente, siempre es menor que el dividendo.

En relación con la comprensión del algoritmo constatamos que la interpretación de la fracción como medida es propicia para la construcción de un algoritmo aditivo. Por una parte, porque permite abordar con mucha naturalidad situaciones problemáticas que son resueltas mediante adición. Por otra, porque la contextualización en una situación concreta permite realizar las sumas con material concreto para, mediante un proceso de abstracciones sucesivas, llegar a establecer un procedimiento estándar para efectuar la suma.

En cuanto a la organización de las secuencias didácticas según la acción que realizan los estudiantes pudimos observar que éstas se producen a nivel micro, pues en relación con el objetivo de cada sesión, al interior de cada una de ellas se produjeron los distintos tipos de situaciones experimentales propuestas por Brousseau. Pero, si observamos la secuencia globalmente en relación con el propósito de resignificación del algoritmo, podemos señalar que las primeras tres sesiones corresponden fundamentalmente a situaciones de acción, en las que los y las estudiantes exploran y amplían la naturaleza del concepto, para posteriormente, a través de la cuarta y quinta sesión, producir situaciones de formulación y, validación e institucionalización del procedimiento construido.

El profesor juega un rol relevante en una propuesta de este tipo, pues se requiere una intervención muy concreta y específica parte suya, para procurar que los estudiantes logren los objetivos relativos a cada fase. La labor del profesor en la secuencia es asegurarse de que las situaciones problematicen realmente a las y los estudiantes, de manera que éstos se vean impelidos a buscar resolver dichos conflictos mediante la generación de nuevos conocimientos. Es preciso estar atento a cada acción, a cada pregunta, romper las convenciones establecidas previamente para dar paso a la ampliación de los significados. Por otra parte debe requerir de los estudiantes, las razones que fundamenten sus afirmaciones, en ocasiones contradecirlos para que busquen maneras de validar lo que han formulado. De esta forma, el docente estará incentivando la generación de discursos argumentativos por parte de los y las estudiantes.

En los distintos momentos de la secuencia, los y las estudiantes se enfrentaron a situaciones que los problematizaron y frente a las cuales debieron buscar respuestas sujetas a las condiciones presentes en la situación. Dicha dinámica les permitió participar protagónicamente en las situaciones de aprendizajes por cuanto eran ellos mismos quienes debían explorar, proponer, y argumentar las soluciones a los problemas planteados. Por otra parte debieron desarrollar un razonamiento argumentativo, y lo más importante, lograron resignificar los conceptos y procedimientos en juego en cada una de las fases de la experiencia.

Por lo tanto, ¿Qué características debería tener una propuesta didáctica que busque resignificar el algoritmo para operar aditivamente con fracciones promoviendo la comprensión tanto del concepto como del propio algoritmo?

- ✓ Debe considerar la relación entre los distintos actores del sistema.
- ✓ Debe articular la comprensión del concepto de fracción para poder construir comprensivamente un procedimiento aditivo y resignificar los algoritmos aditivos ya conocidos.
- ✓ Debe considerar un significado de la fracción que permita construir un algoritmo con sentido, en este caso, utilizamos la noción de fracción como medida en un contexto aditivo, y en menor grado, la noción de fracción como razón para establecer las equivalencias.
- ✓ Deber abordar las contradicciones que surgen con la idea de parte-todo en contextos en que las partes superan al todo.
- ✓ Deben abordar otros obstáculos epistemológicos derivados de la extensión de la naturaleza de los números naturales hacia las fracciones, específicamente:
    - o las fracciones son un tipo de número y no un número compuesto por otros dos.
    - o dos fracciones expresadas con distintas cifras puedan ser "iguales"
    - o al amplificar, la multiplicación de cada uno de los términos no aumenta el valor de la fracción, sino que genera otra de igual valor. Es decir, en el contexto de la amplificación, la multiplicación no puede interpretarse como una suma iterada.
    - o al simplificar, la división de cada uno de los términos no disminuye el valor de la fracción, sino que genera otra de igual valor. Es decir, en el contexto de la simplificación, la división no puede interpretarse como un reparto no como una resta iterada
- ✓ En una secuencia didáctica, pueden producirse distintos tipos de situaciones experimentales según el nivel de análisis: al interior de una sesión, o a través de la secuencia completa.
- ✓ El rol del profesor, como conductor de una secuencia didáctica, es muy relevante. En todo momento debe resguardar las condiciones para que los y las estudiantes vivan las problematizaciones, y los pongan en una situación tal que deban explorar, formular y validar respuestas a dichos problemas.
- ✓ Los estudiantes deben gozar de espacios de participación, entendidos estos como la posibilidad de actuar genuinamente (es decir, no sólo hacer lo que el docente espera que

haga), de formular, argumentar y comunicar sus ideas, de ser escuchados y considerados en la institucionalización del conocimiento abordado.

**Algunas consideraciones**

Es preciso señalar que esta secuencia se aplicó en una situación experimental, con estudiantes de 11-12 años de una escuela municipal de educación básica en Santiago de Chile, por lo tanto las situaciones podrán variar si se aplican en otros contextos: con estudiantes de otras edades, con otros conocimientos previos, en otro contexto sociocultural, etc.

Por otra parte, a través de la investigación fue posible apreciar la enorme importancia de los procesos de comunicación de aula. En general, los docentes no estamos acostumbrados a brindar espacios de construcción de conocimiento a los estudiantes, a dejarlos dudar, a darles tiempo para que descubran sus errores, para que superen sus contradicciones, para que elaboren propuestas y las argumenten. Con frecuencia apuramos el proceso dándole pautas expresas, señalando el error y el por qué del error, no escuchando aquellas intervenciones que consideramos poco relevantes en relación con el camino que queremos transitar, pero que pueden resultar muy relevantes si seguimos la línea de reflexión que quiere seguir el estudiante. Una secuencia didáctica tiene ese doble filo: como tenemos prediseñado qué es lo que queremos que ocurra, podemos tender a no salirnos del carril y desaprovechar instancias de desarrollo matemático. Es importante que tengamos claro qué queremos lograr, pero también es importante ser flexibles para considerar todo aquello que podíamos no haber previsto y que puede formar parte importante del conocimiento que queremos construir.

Por último queremos señalar que esta propuesta representa un aporte puntual a la construcción del concepto de fracción como numero racional. Para llegar a consolidar la comprensión de una noción tan compleja, es preciso abordarla desde los distintos usos y contextos que han originado sus diversos significados. En esta ocasión, quisimos brindar una alternativa que permita la resignificación del algoritmo aditivo, y la ampliación del concepto de fracción desde el significado parte-todo al significado de fracción como medida. En ese sentido, nos parece que aún queda mucho por hacer. El trabajo con las operaciones multiplicativas, específicamente de la división, presenta aún mayores desafíos por cuanto su uso social determina que sea menos natural asociar la operación con una situación problemática en la que el divisor deba ser una fracción, y porque el algoritmo de la división suele ser enseñando en forma más mecanicista y menos argumentada que el de la adición.

# 7 Bibliografía:

Ávila, A., y Mancera, E. (1989). La fracción: una expresión difícil de interpretar. En Pedagogía. *Revista de la Universidad Pedagógica Nacional, 6*, 21-26.

Baturo., A. R. (2004). *Empowering Andrea to help year-5 students construct fraction understanding.* Artículo presentado en 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., y Silver, E. (1983). Rational Number Concepts. In R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 91-125). New York: Academic Press.

Block, D. (2001). *La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico* Unpublished Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en didactique des Mathématiques, 7*(2), 33-115.

Centro Felix Klein. (2010). *Informe de Resultados Diagnóstico de Matemática: Corporación Municipal de La Florida.* Santiago: Universidad de Santiago de Chile.

Contreras, M. (2004). *La división de fracciones: un algoritmo misterioso.* Artículo presentado en VI Jornades d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana, Valencia.

Charalambous, C. Y., y Pitta-Pantazi, D. (2005). *Revisiting a theoretical model on fractions: implications for teaching and research.* Artículo presentado en 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Melbourne.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

De-Faría, E. (2006). Ingeniería Didáctica. In *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*: Centro de Investigaciones Matemáticas y Meta-Matemáticas.Universidad de Costa Rica. .

Douady, R. (1996). Ingeniería didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de collège-seconde. In E. Barbin y R. Douady (Eds.), *Enseñanza de las matemáticas: Relación entre saberes, programas y prácticas*. Francia: Topiques éditions. Publicación del I.R.E.M.

Fandiño, M. I. (2005). *Le frazioni, aspetti concettuali e didattici.* Tesis Doctoral no publicada, Universidad de Bologna.

Figueras, O. (1988). *Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionales.* Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Flores, R. (2010). *Significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria.* Unpublished Tesis de maestría, Instituto Politécnico Nacional de México, México.

Fowler, M. (2008). Counting in Babylon. Obtenido el 29 noviembre, 2010, desde http://galileoandeinstein.physics.virginia.edu/lectures/babylon.pdf

Gairín, J. M., y Rocher, J. (2002). *Educación Matemática en Secundaria*. Madrid: Editorial Síntesis.

Gálvez, G. (1994). La didáctica de las matemáticas. In C. P. y. I. Saiz (Ed.), *Didáctica de las Matemáticas: aportes y reflexiones.* Buenos Aires: Paidós.

García, M., y Montiel, G. (2007). *Resignificando el concepto de función en una experiencia de educación a distancia.* Artículo presentado en I Encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática, Universidad Nacional del Centro, Argentina.

García, M., y Montiel, G. (2007). *Resignificando el concepto de función en una experiencia de educación a distancia.* Artículo presentado en I Encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática, Universidad Nacional del Centro, Argentina.

Jodelet, D. (2000). Representaciones sociales: contribución a un saber sociocultural sin fronteras. En D. Jodelet y A. Guerrero (Eds.), *Develando la cultura. Estudios en representaciones sociales* (pp. 7-30). México: Facultad de Psicología- UNAM.

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge or rational numbers: Its intuitive and formal development. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162-181). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)/Erlbaum.

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge or rational numbers: Its intuitive and formal development In J. H. y. M. Behr (Ed.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162-181). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)/Erlbaum.

Lara, M. (1951). *Aritmética*. Padre Las Casas (Chile): San Francisco.

Llinares, S., y Sánchez, M. V. (1997). *Fracciones* (Vol. 4). Madrid: Editorial Síntesis.

Martínez-Sierra. (2010). Los estudios sobre los procesos de convención matemática: una síntesis metódica de sus resultados. *Enviado para su publicación*.

Martínez-Sierra, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Educación en Matemática Educativa, 8*(2), 195-218.

Mineduc, M. d. E. (2006a). *Programa de Estudio, Quinto Año Básico, Matemática*. Chile.

Mineduc, M. d. E. (2006b). *Programas de Estudio, Cuarto Año Básico, Educación Matemática.* Chile.

Perera, P., y Valdemoros, M. (2007). *Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria.* Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Pulpón, A. (2008). Historia del Papiro de Rhind y similares. Universidad de Castilla- La Mancha, Escuela de Ingeniería Técnica Agrícola, Departamento de Matemática Aplicada. Obtenido el 9 octubre, 2010, desde http://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/165/el_papiro_de_Rhind.pdf

Saussure, F. (1945). *Curso de Lingística General*. Buenos Aires: Editorial Losada.

Valdemoros, M. (1993). *La construcción del lenguaje de las fracciones y de los conceptos involucrados en él.* Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Wittgenstein. (1922). *Tractatus lógico-philosophicus. Santiago* .Universidad Arcis